Une axiomatisation des choix prudents

N. Houy*
nicolas.houy@polytechnique.edu

*Département d'Economie
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex – FRANCE

Résumé :
Nous définissons et axiomatisons les choix prudents pour deux critères. Soient deux critères. Les alternatives choisies par la procédure des choix prudents sont celles qui maximisent une composition des deux critères. Cette composition est telle que 1) elle contient le premier critère et un sous-ensemble du second, et 2) la nouvelle relation binaire n'est pas cyclique et ne peut pas être élargie par des préférences du second critère sans devenir cyclique. Nous faisons également le lien entre les choix prudents, les choix rationnels au sens classique, les choix séquentiellement rationnels ([11]) et les choix rationnels par composition lexicographique des relations de base ([15]).

Mots-clés : Choix prudents, rationalité, axiomatisation.

Abstract:
We define and axiomatize prudent choices for two criteria. Given two criteria, the alternatives chosen by the prudent choice procedure are the ones maximizing some composition of the criteria. This composition is such that 1) it contains the first criterion and a part of the second one, and 2) the new binary relation is not cyclic and cannot be enlarged with preferences of the second criterion without becoming cyclic. We also make the link between prudent choices, classical rational choices, sequentially rational choices ([11]) and lexicographic binary choice rational choices ([15]).

Keywords: Prudent choices, rationality, axiomatization.

1 Introduction

Des progrès importants ont été faits récemment dans l'analyse de la décision multi-critères. Pour résumer et discuter certains de ces progrès, considérons la situation suivante. Une société doit prendre une décision entre les trois alternatives a, b et c. Pour le premier critère, disons l'efficacité, a est meilleure que b. Pour le second critère, disons l'équité, b est meilleure que c, c est meilleure que a et b est meilleure que a. Les procédures suivantes ont été proposées par les théoriciens du choix pour choisir entre a, b et c.

La première procédure a été introduite par [1] et [2], et plus récemment étudiée par [5], [11], [12] et [15]. Cette procédure est mise en œuvre comme suit. Dans un premier temps, la société fait un choix et présélectionne un sous ensemble des alternatives en maximisant le premier critère. Dans notre cas, quand le choix est entre a, b et c, l'alternative b est éliminée et ainsi, a et c sont préselectionnées. Ensuite, la société fait son choix entre les alternatives préselectionnées en maximisant le second critère. Dans notre cas, entre a et c, c est choisie finalement. Cette procédure de composition des deux critères est séduisante parce qu'elle mène à faire des choix non-vides sous des hypothèses très faibles. Cependant, il a été prouvé qu'elle mène très souvent à faire des choix qui ne satisfont pas les axiomes basiques de cohérence.

La seconde procédure proposée pour faire des choix dans le même cadre a été introduite par [15]. D'après cette procédure, la société construit une relation binaire comme suit : pour tout couple d'alternatives x et y, x est préférée à y si et seulement si [x est préférée à y pour le premier critère] ou [y n'est pas préférée à x pour le premier critère et x est préférée à y pour le second critère]. Ensuite, la société prend sa décision en maximisant cette nouvelle relation binaire de préférences. Dans l'exemple donné plus haut, la composition des critères d'efficacité et d'équité donne les préférences suivantes : a est préférée a b, b est préférée à c et c est préférée à a. Dans ce cas, la société ne peut pas choisir entre a, b et c. La raison pour cette incapacité est la suivante : cette procédure, par définition, empêche la société de faire face à des préférences présentant des cycles de taille deux. Cependant, il est possible, comme il est montré dans notre exemple, qu'il existe des cycles de préférences de taille au moins 3. La procédure que nous proposerons ne présente pas une telle possibilité. Ainsi, même si cette seconde procédure est attirante pour ses propriétés de cohérence, elle ne satisfait que difficilement à l'obligation de pouvoir faire des choix.[1]

Dans cet article, nous proposons une troisème procédure. Elle est mise en œuvre comme suit.

[1]Pour une étude plus approfondie des propriétés des deux premières procèdures, voir [5] et [6].

La société construit une nouvelle relation binaire de préférences en prenant en compte le premier critère d'abord. Ensuite, elle élargit cette nouvelle relation binaire de préférences en ajoutant autant d'éléments du second critère que possible sous la contrainte que les préférences construites soient acyclique dans l'ensemble des alternatives entre lesquelles doit choisir la société. Evidemment, la relation de préférences composée ainsi construite peut ne pas être unique et ainsi, nous définissons le choix final comme l'ensemble des alternatives qui maximise au moins une des relations de préférences construites précédemment. Ainsi, dans notre exemple, la société considère comme acquis que a est préférée à b. Le fait que b est préférée à a par le second critère ne peut pas être pris en compte sinon les préférences seraient cycliques. Pour la même raison, les faits que b est préférée à c ET que c est préférée à a par le second critère ne peuvent pas être pris en compte simultanément sinon les préférences seraient aussi cycliques. Cependant le fait que b est préférée à c peut être pris en compte seul. Similairement, le fait que c est préférée à a peut être pris en compte seul. Ainsi, les relations de préférences composées sont : (a préférée à b et b préférée à c) et (c préférée à a et a préférée à b). Ainsi, le choix entre a, b et c est le sous-ensemble des alternatives a et c. L'intuition est la suivante. Quand le second critère est considéré, *i.e.* quand il existe un risque que les préférences soient en contradictions avec le premier critère, alors, seulement un sous-ensemble des préférences du second critère est considéré. Cependant, ce sous-ensemble doit être aussi large que possible sous la contrainte que les préférences construites ne soient pas cycliques.

Nous appelons cette procédure "choix prudents" parce qu'elle est liée aux ordres prudents introduits dans [3] et étudiés plus récemment par [7], [9] et [10].[2] Intuitivement, dans un cadre de choix social avec des individus munis d'ordres linéaires, un ordre prudent est un ordre linéaire tel que l'opposition la plus forte contre lui est minimal. Ainsi, un ordre prudent peut être vu comme un ordre linéaire obtenu en composant plusieurs critères comme suit : d'abord, considérons la comparaison binaire avec l'accord le plus grand. Notons P_1 cette relation binaire. Ensuite, considérons la comparaison binaire avec le second accord le plus important, P_2. Si $P_1 \cup P_2$ est cyclique, alors les ordres prudents sont les extensions linéaires de P_1. Sinon, continuons la procédure avec P_3, la comparaison binaire avec le troisième accord le plus important. Si $P_1 \cup P_2 \cup P_3$ est cyclique, alors les ordres prudents sont les extensions linéaires de $P_1 \cup P_2$. Sinon, continuons la procédure avec P_4 et ainsi de suite. Contrairement à ces études menées dans un cadre de choix social, nous ne considérons que deux critères. Cependant, comme dans les études en théorie du choix rationnel, nous considérons les choix dans les sous-ensembles d'alternatives. Ainsi, la longueur de la procédure décrite ci-dessus dépend de l'ensemble de choix. Dans la mesure de nos connaissances, aucune axiomatisation a jamais été donnée de choix faits à partir de telles relations binaires prudentes ou par une règle de composition de plusieurs critères reliée à une composition prudente.

La suite de cette article est structurée comme suit. Dans la Section 2, nous introduisons les notations. Dans la Section 3, nous donnons une axiomatisation des choix prudents. Dans la Section 4, nous comparons les trois procédures données dans cette introduction. Enfin, dans la Section 5, nous comparons notre procédure à la rationalité des choix au sens classique.

2 Notations

Soit X un ensemble fini d'alternatives avec au moins deux éléments. Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de X de taille au moins deux. Une correspondance de choix sur X est une fonction $C : \mathcal{X} \to 2^X \setminus \emptyset$ telle que $\forall S \in \mathcal{X}, C(S) \subseteq S$.[3] Soit $\mathcal{C}(X)$ l'ensemble de toutes les correspondances de choix sur X.

Soit $C \in \mathcal{C}(X)$. Pour tout sous-ensemble d'alternatives $S \in \mathcal{X}$, nous définissons la relation de domination bipartite ($TD(S, C)$) comme suit : soient $R, T \subseteq S$ tels que $R \cap T = \emptyset$ et $R \cup T = S$. $(R, T) \in TD(S, C)$ si et seulement si R et T sont non-vides et $\forall r \in R, \forall t \in T, r \in C(\{r, t\})$. Ainsi, R domine bipartitement T dans S pour C si et seulement si $\{R$,$T\}$ est une partition de S (avec $R \neq \emptyset$ et $T \neq \emptyset$) et pour le choix entre tout élément de R et tout élément de T, l'élément de R est toujours choisi.

[2] Voir aussi [8] pour un lien avec les "Ranked Pair Rules" qui ont la propriété remarquable d'être indépendantes des clones, [16], [17].

[3] Notons que, par définition, un choix est non-vide. De plus, par simplicité, nous ne considérons pas les choix depuis des singletons.

Soit $P \subseteq X \times X$ une relation binaire sur X. Nous disons que P est asymétrique si et seulement si $\forall a, b \in X$, $(a, b) \in P$ implique $(b, a) \notin P$. Soit $S \in \mathcal{X}$. Nous disons que P est acyclique sur S si et seulement s'il n'existe pas d'entier naturel $n \geq 2$ et pas de $a_1, ..., a_n \in S$ tels que $\forall i \in \{1, ..., n-1\}, (a_i, a_{i+1}) \in P$ et $(a_n, a_1) \in P$.[4] Une relation de préférences est une relation binaire asymétrique. Soit $P\mid_S$ la restriction de P sur S, *i.e* $P\mid_S = \{(a, b) \in P / a, b \in S\}$.

Soient P_1 et P_2 deux relations de préférences sur X. Nous définissons $Q(P_1, P_2)$ par $\forall a, b \in X$, $(a, b) \in Q(P_1, P_2)$ si et seulement si $(a, b) \in P_1$ ou $[(b, a) \notin P_1$ et $(a, b) \in P_2]$.

Soit (P_1, P_2) un couple ordonné de relations de préférences sur X telles que P_1 est acyclique. Soit $S \in \mathcal{X}$. Nous disons que $P \subseteq S \times S$ est une composition prudente de P_1 et P_2 sur S si et seulement si
- $P = P_1\mid_S \bigcup Q$ avec $Q \subseteq P_2\mid_S$,
- P is acyclique et,
- $\forall Q'$ tel que $Q \subset Q' \subseteq P_2\mid_S$, $P_1\mid_S \bigcup Q'$ est cyclique sur S.

Ainsi, une composition prudente de P_1 et P_2 sur S est une relation de préférences comprenant P_1 et autant d'éléments de P_2 que possible sous la contrainte que la composition prudente est acyclique. Par $\widehat{(P_1, P_2)}(S)$, nous notons l'ensemble de toutes les compositions prudentes de P_1 et P_2 sur S. Notons que par définition, $\widehat{(P_1, P_2)}(S)$ est non-vide quand il est bien défini, *i.e.* quand P_1 est acyclique sur S.[5] Notons également que par définition, $\forall P \in \widehat{(P_1, P_2)}(S)$, $P \subseteq Q(P_1, P_2)$.

Soit $P \subseteq X \times X$ une relation de préférences sur X. Par C_P nous définissons

$$\forall S \in \mathcal{X}, C_P(S) = \{a \in S, \forall b \in S, (b, a) \notin P\}.$$

Si $C_P \in \mathcal{C}(X)$, nous disons que P rationalise la correspondance de choix C_P. Soient $P_1, P_2 \subseteq X \times X$ deux relations de préférences sur X. Nous définissons $C_{(P_1,P_2)}$ comme $\forall S \in \mathcal{X}, C_{(P_1,P_2)}(S) = \{a \in S, \exists P \in \widehat{(P_1, P_2)}(S), \forall b \in S, (b, a) \notin P\}$. Si $C_{(P_1,P_2)} \in \mathcal{C}(X)$, nous disons que (P_1, P_2) rationalise prudemment C.

[4] Notons que par définition, l'acyclicité implique l'asymétrie et l'asymétrie implique l'irréflexivité. De plus, quand nous dirons qu'une relation binaire est acyclique, nous signifierons qu'elle est acyclique sur X.

[5] Evidemment, si $\widehat{(P_1, P_2)}(S) = \{\emptyset\}$, nous avons bien $\widehat{(P_1, P_2)}(S) \neq \emptyset$.

Pour illustrer les notations et définitions données jusqu'ici, formalisons l'exemple donné dans l'introduction. Soit $X = \{a, b, c\}$. Soient $P_1 = \{(a, b)\}$ et $P_2 = \{(b, a), (b, c), (c, a)\}$. Evidemment, nous avons $\widehat{(P_1, P_2)}(\{a, b\}) = \{\{(a, b)\}\}$, $\widehat{(P_1, P_2)}(\{b, c\}) = \{\{(b, c)\}\}$, $\widehat{(P_1, P_2)}(\{a, c\}) = \{\{(c, a)\}\}$ et $\widehat{(P_1, P_2)}(X) = \{\{(a, b), (b, c)\}, \{(a, b), (c, a)\}\}$. Ainsi, la correspondance de choix $C_{(P_1,P_2)} \in \mathcal{C}(X)$ prudemmment rationalisée par (P_1, P_2) existe et est telle que $C_{(P_1,P_2)}(\{a, b\}) = \{a\}$, $C_{(P_1,P_2)}(\{b, c\}) = \{b\}$, $C_{(P_1,P_2)}(\{a, c\}) = \{c\}$ et $C_{(P_1,P_2)}(X) = \{a, c\}$.

3 Axiomatisation

Pour simplifier la compréhension de la suite de cet article, nous caractérisons les choix prudents issus d'un couple ordonné de relations de préférences (P_1, P_2) grâce à une condition simple.

Lemme 1 *Soient P_1, P_2 deux relations de préférences sur X avec P_1 acyclique. Soient $S \in \mathcal{X}$ et $a \in S$. $a \in C_{(P_1,P_2)}(S)$ si et seulement si :*
- *$\forall b \in S, (b, a) \notin P_1$ et,*
- *$\forall b \in S$ tel que $(b, a) \in P_2$, $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \exists a_1, ..., a_n \in S$ tels que $\forall k \in \{1, ..., n-1\}$, $(a_k, a_{k+1}) \in Q(P_1, P_2)$, $a_1 = a$ et $a_n = b$.*

Démo. Seulement Si : Faisons l'hypothèse que $\exists b \in S, \overline{(b, a) \in P_1}$. Par définition d'une composition prudente, $\forall P \in \widehat{(P_1, P_2)}(S)$, $(b, a) \in P$. Ainsi, $a \notin C_{(P_1,P_2)}(S)$.

Maintenant, faisons l'hypothèse que $a \in C_{(P_1,P_2)}(S)$, $\forall c \in S, (c, a) \notin P_1$ et $\exists b \in S, (b, a) \in P_2$ et $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \nexists a_1, ..., a_n \in S$ tels que $\forall k \in \{1, ...n-1\}$, $(a_k, a_{k+1}) \in Q(P_1, P_2)$, $a_1 = a$ et $a_n = b$. Comme, par hypothèse, $a \in C_{(P_1,P_2)}(S)$, par définition de $C_{(P_1,P_2)}$, $\exists P \in \widehat{(P_1, P_2)}(S)$, $(b, a) \notin P$. Par hypothèse, $(b, a) \notin P_1$, $(b, a) \in P_2$. De plus, $(a, b) \notin Q(P_1, P_2)$. Ainsi, $(b, a) \in Q(P_1, P_2)$. Considérons $P \bigcup (b, a)$. Par définition d'une composition prudente, comme $P \in \widehat{(P_1, P_2)}(S)$ et $(b, a) \in P_2$, $P \bigcup (b, a)$ est cyclique sur S. De plus, $P \subset P \bigcup (b, a) \subseteq Q(P_1, P_2)\mid_S$. Ainsi, la cyclicité de $P \bigcup (b, a)$ et l'acyclicité de P sur S impliquent $\exists K \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \exists a_1, ..., a_K \in S$ tels que $\forall k \in \{1, ..., K-1\}$, $(a_k, a_{k+1}) \in Q(P_1, P_2)$, $a_1 = a$ et $a_K = b$. D'où une contradiction avec les hypothèses.

Si : Soient $S \in \mathcal{X}$ et $a \in S$ tels que $\nexists b \in S, (b,a) \in P_1$ et, [$\forall b \in S$ tel que $(b,a) \in P_2$, $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \exists a_1, ..., a_n \in S$ tels que $\forall k \in \{1, ..., n-1\}$, $(a_k, a_{k+1}) \in Q(P_1, P_2)$, $a_1 = a$ et $a_n = b$]. Montrons qu'il existe $P \in (\widehat{P_1, P_2})(S)$ tel que $\forall b \in S, (b,a) \notin P$. Soit $B = \{b \in S, (b,a) \in P_2\}$. Définissons $P^0 = Q(P_1, P_2) \mid_S \setminus \bigcup_{b \in B}(b,a)$. Si P^0 is acyclique, alors, par définition d'une composition prudente, $P^0 \in (\widehat{P_1, P_2})(S)$ et la preuve est faite. Sinon, par hypothèse, $P_1 \mid_S$ est acyclique, d'où il existe $P_1 \subseteq P \subseteq P^0$ tel que $P \in (\widehat{P_1, P_2})(S)$ et la preuve est faite puisque $\forall b \in B, (b,a) \notin P^0$ et ainsi $\forall b \in S, (b,a) \notin P$.$\square$

Comme premier résultat, notons que pour tout couple P_1 et P_2 de relations de préférences sur X telles que P_1 est acyclique, la paire ordonnée (P_1, P_2) rationalise prudemment une correspondance de choix. Ainsi, ce résultat donne les faibles conditions sous lesquelles une paire ordonnée de deux relations de préférences rationalise prudemment une correspondance de choix. La démonstration est triviale suivant la définition de $(\widehat{P_1, P_2})(S)$ qui implique que l'ensemble $(\widehat{P_1, P_2})(S)$ est non-vide et contient toujours des relations de préférences acycliques si et seulement s'il est bien défini, c'est-à-dire si P_1 est acyclique.

Proposition 1 *Soient P_1 et P_2 deux relations de préférences sur X. Il existe une correspondance de choix rationalisée prudemment par (P_1, P_2) si et seulement si P_1 est acyclique.*

Le but de la suite de cette Section est de donner les conditions que doit satisfaire une correspondance de choix pour être prudemment rationalisée.

Le premier axiome est un axiome usuel en théorie du choix et est donné dans [14] par exemple. Il impose que si une alternative est choisie dans différents ensembles d'alternatives, elle doit être choisie dans l'union de ces ensembles.

Axiome 1 (γ) *Soit $C \in \mathcal{C}(X)$. La correspondance de choix C satisfait γ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall S_1, ..., S_n \in \mathcal{X}$,*

$a \in \bigcap_{i \in \{1,...,n\}} C(S_i)$ implique $a \in C(\bigcup_{i \in \{1,...,n\}} S_i)$.

Le second axiome est une version faible de la condition de cohérence α dite de Chernoff. Donnons une interprétation. Faisons l'hypothèse que l'ensemble d'alternatives S peut être divisé en deux sous-ensembles distincts, T et R tels que R domine bipartitement T, *i.e.* tout élément de R est choisi quand il n'est considéré dans un ensemble qu'avec un élément de T. Maintenant, considérons qu'il existe un élément a de T qui n'est pas choisi quand il n'est considéré qu'avec l'élément b de R. Alors, a est dominé par b, non seulement parce qu'il n'est pas choisi dans l'ensemble de choix $\{a,b\}$, mais aussi parce que a est un élément de T, dominé bipartitement par R, dont b est un élément. Dans ce cas de domination double, l'axiome α Faible impose que que a ne soit pas choisi dans S.

Axiome 2 (α Faible) *Soit $C \in \mathcal{C}(X)$. La correspondance de choix C satisfait α Faible si et seulement si $\forall S \in \mathcal{X}$ et $\forall a \in S$,*

si $\exists (R,T) \in TD(S,C)$ tel que $a \in T$ et $\exists b \in R, a \notin C(\{a,b\})$, alors $a \notin C(S)$.

Notons que l'axiome α Faible est plus faible que l'axiome α usuel. En fait, il est aussi plus faible que l'axiome $\alpha 2$ qui lui-même est une version faible de l'axiome α, voir [13].[6] En effet, si l'axiome $\alpha 2$ est posé, $a \notin C(S)$ est une conséquence de $\exists b \in S, a \notin C(\{a,b\})$ seulement et la condition de domination bipartite n'est pas nécessaire.

Montrons grâce à un exemple que l'axiome α Faible est strictement plus faible que les axiomes α et $\alpha 2$. Soient $X = \{a,b,c\}$ et $C \in \mathcal{C}(X)$ définie par $C(\{a,b\}) = \{a\}$, $C(\{a,c\}) = \{c\}$, $C(\{b,c\}) = \{b\}$ et $C(X) = \{c\}$. On peut voir que C ne satisfait pas $\alpha 2$ puisque $C(\{b,c\}) = \{b\}$ devrait impliquer $c \notin C(X)$. Comme l'axiome α est plus fort que l'axiome $\alpha 2$, il est évident que l'axiome α n'est pas satisfait par C. Cependant, C satisfait α Faible puisque même si $C(\{b,c\}) = \{b\}$, nous avons $TD(X,C) = \emptyset$ et donc l'axiome α Faible est trivialement satisfait. Notons que C est rationalisée prudemment par (P_1, P_2) avec $P_1 = \{(a,b),(c,a)\}$ et $P_2 = \{(b,c)\}$.

[6] Avec nos notations, l'axiome α peut être écrit comme suit : La correspondance de choix C satisfait α si et seulement si $\forall S, T \in \mathcal{X}$ tels que $T \subseteq S$ et $\forall a \in T$, si $a \notin C(T)$, alors $a \notin C(S)$. L'axiome $\alpha 2$ peut être écrit comme suit : La correspondance de choix C satisfait $\alpha 2$ si et seulement si $\forall S \in \mathcal{X}$ et $\forall a \in S$, si $\exists b \in S \setminus \{a\}, a \notin C(\{a,b\})$, alors $a \notin C(S)$.

Le troisième axiome peut être interprété comme suit. Faisons l'hypothèse qu'il n'existe pas de domination bipartite dans S pour C. Alors, par définition, il n'y a pas de sous-ensemble d'alternatives "légitime" qui pourrait être désigné dans un sens très faible. Maintenant, faisons l'hypothèse que, pour l'alternative b, nous avons la situation suivante : pour toute a dans S, si seulement a est choisie quand le choix porte entre a et b, alors on peut trouver un ensemble de choix comprenant a et b et tel que b est parmi les alternatives choisies. Ainsi, dans un sens, la domination des éléments de S sur b est soit non-existante soit dépendante de l'ensemble de choix. Dans ce cas, d'après l'axiome de Non Domination Bipartite, l'alternative b devrait être choisie parmi les éléments de S puisqu'elle est au plus dominée dans un sens dépendant de l'ensemble de choix.

Axiome 3 (Non Domination Bipartite, NDB) *Soit $C \in \mathcal{C}(X)$. La correspondance de choix C satisfait NDB si et seulement si $\forall S \in \mathcal{X}$ et $\forall b \in S$,*

si (i) $TD(S,C) = \emptyset$ et (ii) $\forall a \in S \setminus \{b\}, [C(\{a,b\}) = \{a\} \Rightarrow \exists S' \in \mathcal{X}$, $a \in S'$ et $b \in C(S')]$,

alors $b \in C(S)$.

L'intuition soutenant l'axiome NDB est la suivante. Dans la théorie du choix rationnel traditionnelle, $TD(S,C)$ vide implique, puisqu'elle implique que chacune des alternatives de S est dominée et domine une autre alternative de S dans la relation binaire de base, un choix vide dans S. NDB impose que dans une telle situation, une domination qui dépend de l'ensemble de choix devrait être considérée comme plus faible qu'une domination qui ne dépendrait pas de l'ensemble de choix et seulement les alternatives qui sont dominées au sens d'une domination qui dépend de l'ensemble de choix devraient être choisies.

La proposition 2 montre qu'une correspondance de choix peut être rationalisée prudemment si et seulement si elle satisfait γ, α Faible et NDB.

Proposition 2 *Soit C in $\mathcal{C}(X)$. La correspondance de choix C satisfait γ, α Faible et NDB si et seulement si elle est prudemment rationalisée par une paire ordonnée de relations de préférences (P_1, P_2) avec P_1 acyclique.*

Démo. Seulement Si : Soit $C \in \mathcal{C}(X)$ satisfaisant γ, α Faible et NDB. Définissons P_1 comme suit : $\forall a, b \in X$ tels que $a \neq b$, $(a,b) \in P_1$ si et seulement $C(\{a,b\}) = \{a\}$ et $\forall S \in \mathcal{X}$, $a \in S \Rightarrow b \notin C(S)$. Définissons P_2 comme suit : $\forall a, b \in X$ tels que $a \neq b$, $(a,b) \in P_2$ si et seulement si $C(\{a,b\}) = \{a\}$ et $\exists S \in \mathcal{X}, a \in S$ et $b \in C(S)$. Par définition, P_1 et P_2 sont asymmériques. De plus, P_1 is acyclique. En effet, si P_1 avait un cycle, nous aurions $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\exists a_1, ..., a_n \in X$ tels que $\forall k \in \{1, ..., n-1\}$, $(a_k, a_{k+1}) \in P_1$ et $(a_n, a_1) \in P_1$. Alors, par définition, nous aurions $C(\{a_1, ..., a_n\}) = \emptyset$ ce qui serait en constradiction avec le fait que C est une correspondance de choix.

Montrons que C est prudemment rationalisée par (P_1, P_2). Soient $S \in \mathcal{X}$ et $a \in S$. En utilisant le Lemme 1, nous allons montrer que : 1) si $\exists b \in S, (b,a) \in P_1$, alors $a \notin C(S)$, 2) si $\forall b \in S, (b,a) \notin P_1$ et, $\forall b \in S$ tel que $(b,a) \in P_2$, $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \exists a_1, ..., a_n \in S$ tels que $\forall k \in \{1, ..., n-1\}$, $(a_k, a_{k+1}) \in Q(P_1, P_2)$, $a_1 = a$ et $a_n = b$, alors $a \in C(S)$, 3) if $\forall d \in S, (d,a) \notin P_1$ et, $\exists b \in S$ tel que $(b,a) \in P_2$ et $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\nexists a_1, ..., a_n \in S$ tels que $\forall k \in \{1, ..., n-1\}$, $(a_k, a_{k+1}) \in Q(P_1, P_2)$, $a_1 = a$ et $a_n = b$, alors, $a \notin C(S)$.

1) Faisons l'hypothèse que $\exists b \in S, (b,a) \in P_1$. Par définition de P_1, $a \notin C(S)$.

2) Faisons l'hypothèse que $\forall b \in S, (b,a) \notin P_1$ et, $\forall b \in S$ tel que $(b,a) \in P_2$, $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \exists a_1, ..., a_n \in S$ tels que $\forall k \in \{1, ..., n-1\}$, $(a_k, a_{k+1}) \in Q(P_1, P_2)$, $a_1 = a$ et $a_n = b$. Définissons $B = \{b \in S, (b,a) \in P_2\}$. Si $B = \emptyset$, alors, par définition de P_1 et P_2, $\forall b \in S$, $a \in C(\{a,b\})$ et par γ, $a \in C(S)$. Soit $B \neq \emptyset$. Soit $b \in B$. Par hypothèse, $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \exists a_1, ..., a_n \in S$ tels que $\forall k \in \{1, ..., n-1\}$, $(a_k, a_{k+1}) \in Q(P_1, P_2)$, $a_1 = a$ et $a_n = b$. Soit $B_b = \{a_1, ..., a_n\}$. Comme $\forall k \in \{1, ..., n-1\}$, $(a_k, a_{k+1}) \in Q(P_1, P_2)$ et $(b,a) \in Q(P_1, P_2)$, *i.e.* $\{a_k\} = C(\{a_k, a_{k+1}\})$ et $\{b\} = C(\{a,b\})$, $TD(B_b, C) = \emptyset$. De plus, $\forall c \in B_b \setminus \{a\}$, $(c,a) \notin P_1$. Alors, $\exists S' \in \mathcal{X}, b \in S', a \in C(S')$. Alors, par NDB, $a \in C(B_b)$. Ainsi, $a \in \bigcap_{b \in B} C(B_b)$. D'où, par γ, $a \in C(\bigcup_{b \in B} B_b)$. Si $\bigcup_{b \in B} B_b = S$, $a \in C(S)$. Sinon, par hypothèse, $\forall c \in S \setminus \bigcup_{b \in B} B_b$, $(c,a) \notin P_1 \bigcup P_2$. D'où, par définition, $a \in C(\{a,c\})$. D'où, $a \in C(\bigcup_{b \in B} B_b) \bigcap_{c \in S \setminus \bigcup_{b \in B} B_b} C(\{a,c\})$. D'où, par γ, $a \in C(S)$.

3) Faisons l'hypothèse que $\forall d \in S, (d,a) \notin P_1$ et, $\exists b \in S$ tel que $(b,a) \in P_2$ et $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\nexists a_1, ..., a_n \in S$ tels que $\forall k \in \{1, ..., n-1\}$, $(a_k, a_{k+1}) \in Q(P_1, P_2)$, $a_1 = a$ et $a_n = b$. Définissons $ID_a = \{c \in S, \exists K \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \exists a_1, ... a_K \in S, \forall k \in \{1, ..., K-1\}(a_k, a_{k+1}) \in Q(P_1, P_2), a_1 = a, a_K = c\}$. Alors, ID_a est l'ensemble des éléments de S directement ou indirectement dominés par a. Par hypothèse, $b \notin ID_a$. Soit $B = S \setminus (ID_a \bigcup \{a\})$. Evidemment $b \in B$. De plus, $\forall c \in ID_a \bigcup \{a\}$, $\forall d \in B, (c,d) \notin Q(P_1, P_2)$ (sinon, évidemment, $d \in ID_a$ ce qui mène à une contradiction). Alors, $\forall c \in ID_a \bigcup \{a\}$, $\forall d \in B, d \in C(\{c,d\})$. Alors, $(B, ID_a \bigcup \{a\}) \in TD(S,C)$. De plus, par hypothèse, $a \notin C(\{a,b\})$ avec $a \in ID_a \bigcup \{a\}$ et $b \in B$. D'où, par α Faible, $a \notin C(S)$.

Si : Soient P_1 et P_2 deux relations de préférences sur X avec P_1 acyclique. Soit $C \in \mathcal{C}(X)$ une correspondance de choix prudemment rationalisée par la paire ordonnée (P_1, P_2).

1) Montrons que C satisfait γ. Soient $S_1, ..., S_n \in \mathcal{X}$. Soit $a \in \bigcap_{i \in \{1,...,n\}} C(S_i)$. Par le Lemme 1, $\forall i \in \{1, ..., n\}, \forall b \in S_i, (b,a) \notin P_1$. D'où, $\forall b \in \bigcup_{i \in \{1,...,n\}} S_i, (b,a) \notin P_1$. Par le Lemme 1, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $\forall b \in S_i$ tel que $(b,a) \in P_2$, $\exists m_i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \exists a_1, ..., a_{m_i} \in S_i$ tels que $\forall k \in \{1, ..., m_i - 1\}$, $(a_k, a_{k+1}) \in Q(P_1, P_2)$, $a_1 = a$ et $a_{m_i} = b$. D'où, $\forall b \in \bigcup_{i \in \{1,...,n\}} S_i$ tel que $(b,a) \in P_2$, $\exists m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \exists a_1, ..., a_m \in \bigcup_{i \in \{1,...,n\}} S_i$ tels que $\forall k \in \{1, ..., m-1\}$, $(a_k, a_{k+1}) \in Q(P_1, P_2)$, $a_1 = a$ et $a_m = b$. D'où, par le Lemme 1, $a \in \bigcup_{i \in \{1,...,n\}} C(S_i)$.

2) Montrons que C satisfait α Faible. Soit $S \in \mathcal{X}$ et $a \in S$. Soit $(R,T) \in TD(S,C)$ tel que $a \in T$ et $[\exists d \in R, a \notin C(\{a,d\})]$. Par définition de $TD(S,C)$, $\forall b \in R, \forall c \in T$, $b \in C(\{b,c\})$, ce qui implique que $(c,b) \notin Q(P_1, P_2)$. Par définition de $Q(P_1, P_2)$ et de la rationalité prudente, $a \notin C(\{a,d\})$ implique $(d,a) \in Q(P_1, P_2)$, ou de manière équivalente, 1) $(d,a) \in P_1$, ou 2) $(a,d), (d,a) \notin P_1$ et $(d,a) \in P_2$. Dans le cas 1), par le Lemme 1, $a \notin C(S)$. Dans le cas 2), comme $\forall b \in R, \forall c \in T$, $(c,b) \notin Q(P_1, P_2)$, nous avons $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\nexists a_1, ..., a_n \in S$ tels que $\forall k \in \{1, ..., n-1\}$, $(a_k, a_{k+1}) \in Q(P_1, P_2), a_1 = a$ et $a_n = d$. D'où, par le Lemme 1, $a \notin C(S)$.

3) Montrons que C satisfait NDB. Soient $S \in \mathcal{X}$ et $b \in S$. Faisons l'hypothèse que $TD(S,C) = \emptyset$ et $\forall a \in S$, $C(\{a,b\}) = \{a\} \Rightarrow \exists S' \in \mathcal{X}$ tel que $a, b \in S'$ et $b \in C(S')$. Soit $a \in S$. Par le Lemme 1, si $C(\{a,b\}) = \{a\}$ et $\exists S' \in \mathcal{X}$ tel que $a, b \in S'$ et $b \in C(S')$, alors $(a,b), (b,a) \notin P_1$ et $(a,b) \in P_2$. De plus, par définition de la rationalité prudente, si $b \in C(\{a,b\})$, alors, $(a,b) \notin P_1 \bigcup P_2$. Alors, $\forall a \in S, (a,b) \notin P_1$. Maintenons, considérons $a \in S$ tel que $(a,b) \in P_2$. Alors, par définition de la rationalité prudente, $C(\{a,b\}) = \{a\}$. Définissons $ID_b = \{c \in S, \exists K \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \exists d_1, ... d_K \in S$ tels que $\forall k \in \{1, ..., K-1\}, (d_k, d_{k+1}) \in Q(P_1, P_2), d_1 = b$ et $d_K = c\} \cup \{b\}$ et $\overline{ID_b} = S \setminus ID_b$. Faisons l'hypothèse que $\overline{ID_b} \neq \emptyset$. Par définition, $ID_b \bigcap \overline{ID_b} = \emptyset$ et $ID_b \bigcup \overline{ID_b} = S$. Alors, pour avoir $TD(S,C) = \emptyset$, nous avons nécessairement $\exists c \in ID_b, \exists d \in \overline{ID_b}$ tels que $\{c\} = C(\{c,d\})$. Cela implique que $(c,d) \in Q(P_1, P_2)$ et alors, $d \in ID_b$ ce qui contredit le fait que $d \in \overline{ID_b}$. Alors, $\overline{ID_b} = \emptyset$ et en particulier, $a \in ID_b$. Alors, par définition, $\exists K \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \exists d_1, ... d_K \in S$ tels que $\forall k \in \{1, ..., K-1\}, (d_k, d_{k+1}) \in Q(P_1, P_2), d_1 = b$ et $d_K = a$. En appliquant le même raisonnement pour tout $a \in S$ tel que $(a,b) \in P_2$, nous avons $b \in C(S)$ par le Lemme 1.$\square$

Evidemment, quand l'ensemble des alternatives a trois éléments ou moins, l'axiome NDB est trivialement satisfait. Pour au moins quatre alternatives, la proposition suivante montre que les axiomes donnés dans la Proposition 2 sont indépendants.

Proposition 3 *Les axiomes γ, α Faible et NDB sont indépendants.*

Démo. γ et α Faible $\nRightarrow$ NDB : Soit $X = \{a, b, c, d\}$ et soit la correpondance de choix $C \in \mathcal{C}(X)$ définie par : $C(\{a,b\}) = \{a\}$, $C(\{a,c\}) = \{c\}$, $C(\{a,d\}) = \{d\}$, $C(\{b,c\}) = \{b\}$, $C(\{b,d\}) = \{b\}$, $C(\{c,d\}) = \{c\}$, $C(\{a,b,c\}) = \{c\}$, $C(\{a,b,d\}) = \{a\}$, $C(\{a,c,d\}) = \{c\}$, $C(\{b,c,d\}) = \{b\}$, $C(X) = X$. Il est immédiat de vérifier que C satisfait γ et α Faible. Montrons que C ne satisfait pas NDB. Nous avons $TD(\{a,b,c\}, C) = \emptyset$ et $\forall e \in \{a,b,c\}$ tel que $C(\{a,e\}) = \{e\}$, $\exists S \in \mathcal{X}$ tel que $a, e \in S$ et $a \in C(S)$ (Pour voir le dernier point, considérer $S = X$). D'où, par NDB, nous devrions avoir $a \in C(\{a,b,c\})$ ce qui n'est pas le cas.

α Faible et NDB $\not\Rightarrow \gamma$: Soit $X = \{a,b,c\}$ et soit la correpondance de choix $C \in \mathcal{C}(X)$ définie par : $C(\{a,b\}) = \{a,b\}$, $C(\{a,c\}) = \{a,c\}$, $C(\{b,c\}) = \{b,c\}$, $C(X) = \{b\}$. Il est immédiat de vérifier que C satisfait α Faible et NDB. Cependant, C ne satisfait pas γ puisque $C(\{a,b\}) = \{a,b\}$ et $C(\{a,c\}) = \{a,c\}$ devraient impliquer $a \in C(\{X\})$ ce qui n'est pas le cas.

γ et NDB $\not\Rightarrow \alpha$ Faible : Soit $X = \{a,b,c\}$ et soit la correpondance de choix $C \in \mathcal{C}(X)$ définie par : $C(\{a,b\}) = \{a\}$, $C(\{a,c\}) = \{a\}$, $C(\{b,c\}) = \{b\}$, $C(X) = \{a,b\}$. Il est immédiat de vérifier que C satisfait γ et NDB. Cependant, C ne satisfait pas α Faible. En effet, nous avons $(\{a\},\{b,c\}) \in TD(X,C)$ et $C(\{a,b\}) = \{a\}$. D'où, par α Faible, nous devrions avoir $b \notin C(X)$, ce qui n'est pas le cas. $\square$

4 Relation avec les autres règles de composition

Nous continuons cette étude des choix prudents en faisant le lien entre ceux-ci et deux des principales procédures pour composer deux critères existant dans la littérature. La première procédure a été étudiée par [11] (rationalité séquentielle), la seconde l'a été par [15] (rationalité par composition lexicographique des relations de base). Formellement, soit $C \in \mathcal{C}(X)$ une correspondance de choix sur X. Nous disons que C est séquentiellement rationnelle si et seulement s'il existe deux relations de préférences P_1 et P_2 sur X telles que $\forall S \in X, C(S) = C_{P_2}(C_{P_1}(S))$. Nous disons que C est rationnelle par composition lexicographique des relations de base (CLB-rationnelle) si et seulement s'il existe deux relations de préférences sur X, P_1 et P_2, telles que $\forall S \in X, C(S) = C_{Q(P_1,P_2)}(S)$. Enfin, pour la procédure que nous avons introduite dans cet article, nous disons que C est prudemment rationnelle si et seulement s'il existe deux relations de préférences P_1 et P_2 telles que C est prudemment rationalisée par la paire ordonnée (P_1,P_2).

Proposition 4 *Soit $C \in \mathcal{C}(X)$.*

1. *Si C est CLB-rationnelle, alors elle est séquentiellement rationnelle et prudemment rationnelle.*
2. *C peut être séquentiellement rationnelle et ne pas être prudemment rationnelle.*
3. *C peut être prudemment rationnelle et ne pas être séquentiellement rationnelle.*
4. *C peut être séquentiellement rationnelle ou prudemment rationnelle et ne pas être CLB-rationnelle.*

Démo. 1 : Soit $C \in \mathcal{C}(X)$ CLB-rationalisée par P_1 et P_2. Si nous posons $P'_1 = Q(P_1,P_2)$ et $P'_2 = \emptyset$, C est séquentiellement rationalisée par P'_1 et P'_2 et C est prudemment rationalisée par (P'_1,P'_2).

2 : Soit $X = \{a,b,c,d\}$ et soit la correpondance de choix $C \in \mathcal{C}(X)$ définie par : $C(\{a,b\}) = \{a\}$, $C(\{a,c\}) = \{a,c\}$, $C(\{a,d\}) = \{a,d\}$, $C(\{b,c\}) = \{b\}$, $C(\{b,d\}) = \{d\}$, $C(\{c,d\}) = \{c\}$, $C(\{a,b,c\}) = \{a,c\}$, $C(\{a,b,d\}) = \{a,d\}$, $C(\{a,c,d\}) = \{a,c\}$, $C(\{b,c,d\}) = \{c\}$ et $C(X) = \{a,c\}$. Cette correspondance de choix est séquentiellement rationalisée par $P_1 = \{(a,b),(d,b),(c,d)\}$ et $P_2 = \{(b,c)\}$. Cependant, il est immédiat de vérifier que C n'est pas prudemment rationnelle. En effet, elle ne satisfait pas l'axiome α Faible. Pour voir cela, notons que $(\{a,b\},\{c\}) \in TD(\{a,b,c\},C)$, $\{b\} = C(\{b,c\})$ et, $c \in C(\{a,b,c\})$, ce qui est interdit par l'axiome α Faible.

3 : Soit $X = \{a,b,c\}$ et soit la correpondance de choix $C \in \mathcal{C}(X)$ définie par : $C(\{a,b\}) = \{a\}$, $C(\{b,c\}) = \{b\}$, $C(\{a,c\}) = \{c\}$ et $C(X) = \{a,c\}$. Cette correspondance de choix est prudemment rationalisée par (P_1,P_2) avec $P_1 = \{(a,b)\}$ et $P_2 = \{(b,c),(c,a)\}$. Cependant, il est immédiat de vérifier que C n'est pas séquentiellement rationnelle.

4 : Par 1, 2 et 3 de la Proposition 4.$\square$

5 Relation avec la théorie classique

La théorie classique de la rationalité des choix caractérise les correspondances de choix qui peuvent être obtenues par maximisation d'une seule relation de préférences. Il est bien connu que ces correspondances de choix sont celles qui satisfont les axiomes α et γ.

Proposition 5 ([4]) *Soit $C \in \mathcal{C}(X)$. La correspondance de choix C satisfait α et γ si et seulement s'il existe une relation de préférences acyclique P telle que P rationalise C.*

Pour faire le lien entre notre caractérisation des choix prudents et la Proposition 5, nous allons poser l'axiome suivant qui impose à une correspondance de choix C que $TD(S, C)$ soit non-vide pour tout $S \in \mathcal{X}$.

Axiome 4 (Toujours Domination Bipartite, TDB) *Soit $C \in \mathcal{C}(X)$. La correpondance de choix C satisfait TDB si et seulement si $\forall S \in \mathcal{X}$, $TD(S, C) \neq \emptyset$.*

Bien sûr, si une correspondance de choix satisfait TDB, alors elle satisfait également trivialement NDB. D'où la proposition suivante qui montre que la rationalité au sens classique correspond à la rationalité prudente à laquelle on a imposé TDB

Proposition 6 *Soit $C \in \mathcal{C}(X)$. La correspondance de choix C satisfait TDB, α Faible et γ si et seulement s'il existe une relation de préférences acyclique P telle que P rationalise C.*

Démo. Seulement Si : Soit $C \in \mathcal{C}(X)$ satisfaisant γ, α Faible et TDB. Définissons P comme suit : $\forall a, b \in X$ tels que $a \neq b$, $(a, b) \in P$ si et seulement si $C(\{a, b\}) = \{a\}$. Par définition, P est asymétrique. De plus, P est acyclique. En effet, si P avait un cycle, nous aurions $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\exists a_1, ..., a_n \in X$ tels que $\forall k \in \{1, ..., n-1\}$, $(a_k, a_{k+1}) \in P$ et $(a_n, a_1) \in P$. Alors, par définition de P, nous aurions $TD(\{a_1, ..., a_n\}, C) = \emptyset$ ce qui contredirait TDB.

Montrons que C est rationalisée par P. Soit $S \in \mathcal{X}$ et $a \in S$.

1) Faisons l'hypothèse que $\exists b \in S$ tel que $(b, a) \in P$. Définissons $ID_a = \{c \in S, \exists K \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \exists a_1, ...a_K \in S, \forall k \in \{1, ..., K-1\}(a_k, a_{k+1}) \in P, a_1 = a, a_K = c\}$. Ainsi, ID_a est l'ensemble des éléments de S directement ou indirectement dominés par a. Comme P est acyclique, $b \notin ID_a$. De plus, $\forall c \in ID_a \bigcup\{a\}, \forall d \in S \setminus (ID_a \bigcup\{a\})$, par définition de P, $(c, d) \notin P$ (ou sinon, nous aurions $d \in ID_a \bigcup\{a\}$ ce qui contredirait $d \in S \setminus (ID_a \bigcup\{a\})$). D'où $\forall c \in ID_a \bigcup\{a\}, \forall d \in S \setminus (ID_a \bigcup\{a\})$, $d \in C(\{c, d\})$. D'où, $\{b\} = C(\{a, b\})$ et $(S \setminus (ID_a \bigcup\{a\}), ID_a \bigcup\{a\}) \in TD(S, C)$. Alors, par α Faible, $a \notin C(S)$.

2) Faisons l'hypothèse que $\forall b \in S$, $(b, a) \notin P$. Alors, par définition de P, $\forall b \in S, a \in C(\{a, b\})$. D'où, par γ, $a \in C(S)$.

Si : Soit P une relation de préférences acyclique sur X. Soit $C \in \mathcal{C}(X)$ une correspondance de choix rationalisée par P (elle existe par Proposition 5).

1) C satisfait γ par Proposition 5.

2) C satisfait α Faible par Proposition 5 et le fait que α Faible est impliqué par α.

3) Montrons que C satisfait TDB. Soit $S \in \mathcal{X}$. Comme P est acyclique et S a un nombre fini d'éléments, il existe $a \in S$ tel que $\forall b \in S, (b, a) \notin P$. Par définition de la domination bipartite, $(\{a\}, S \setminus \{a\}) \in TD(S, C)$. $\square$

De plus, quand l'ensemble des alternatives a trois éléments au plus, les axiomes TDB, α Faible et γ sont independants.

Proposition 7 *Soit X un ensemble d'alternatives avec au moins trois éléments. TDB, α Faible et γ sont independants.*

Démo. γ et α Faible $\not\Rightarrow$ TDB : Soit $X = \{a, b, c\}$ et soit la correpondance de choix $C \in \mathcal{C}(X)$ définie par : $C(\{a, b\}) = \{a\}$, $C(\{a, c\}) = \{c\}$, $C(\{b, c\}) = \{b\}$, $C(X) = \{a\}$. Il est immédiat de vérifier que C satisfait γ et α Faible. Cependant, $TD(\{a, b, c\}, C) = \emptyset$ et donc C ne satisfait pas TDB.

α Faible et TDB $\not\Rightarrow \gamma$: Soit $X = \{a, b, c\}$ et soit la correpondance de choix $C \in \mathcal{C}(X)$ définie par : $C(\{a, b\}) = \{a, b\}$, $C(\{a, c\}) = \{a, c\}$, $C(\{b, c\}) = \{b, c\}$, $C(X) = \{b\}$. Il est immédiat de vérifier que C satisfait α Faible et TDB. Cependant, C ne satisfait pas γ puisque $C(\{a, b\}) = \{a, b\}$ et $C(\{a, c\}) = \{a, c\}$ devraient impliquer $a \in C(\{X\})$.

γ et TDB $\not\Rightarrow \alpha$ Faible : Soit $X = \{a, b, c\}$ et soit la correpondance de choix $C \in \mathcal{C}(X)$ définie par : $C(\{a, b\}) = \{a\}$, $C(\{a, c\}) = \{a\}$, $C(\{b, c\}) = \{b\}$, $C(X) = \{a, b\}$. Il est immédiat de vérifier que C satisfait γ et TDB. Cependant, C ne satisfait pas α Faible. En effet, nous avons $(\{a\}, \{b, c\}) \in TD(X, C)$ et $C(\{a, b\}) = \{a\}$. D'où, par α Faible, nous devrions avoir $b \notin C(X)$. $\square$

Références

[1] Aizerman M. A. (1985) "New Problems in the General Choice Theory" *Social Choice and Welfare* 2 : 235-282.

[2] Aizerman, M. A. et F. T. Aleskerov (1995), *Theory of Choice*. Amsterdam : North Holland.

[3] Arrow K. et H. Raynaud (1986) Social Choice and Multicriterion Decision Making. MIT Press.

[4] Blair D. H., G. Bordes, J. S. Kelly et K. Suzumura (1976) "Impossibility Theorems without Collective Rationality" *Journal of Economic Theory* 13 : 361-379.

[5] Houy N. (2007) "Rationality and order-dependent sequential rationality" *Theory and Decision* 62(2) : 119-134.

[6] Houy N. et K. Tadenuma (2007) "Lexicographic compositions of two criteria for decision making" *Journal of Economic Theory, forthcoming*.

[7] Lamboray C. (2007) "A Characterization of the Prudent Order Preference Function" *Mathematical Social Sciences* 57 : 389-405.

[8] Lamboray C. (2009) "A Characterization of the Ranked Pairs Rule" *Social Choice and Welfare,* 32 : 129-155.

[9] Lansdowne Z. (1996) "Ordinal Ranking Methods for Multicriterion Decision Making" *Naval Research Logistics* 43 : 613-627.

[10] Lansdowne Z. (1997) "Outranking Methods for Multicriterion Decision-Making : Arrow's and Raynaud's Conjecture" *Social Choice and Welfare* 14 : 125-128.

[11] Manzini P. et M. Mariotti (2007) "Sequentially Rationalizable Choice" *American Economic Review* 97(5) : 1824-1839.

[12] Manzini P. et M. Mariotti (2007) "Shorlisting" Working paper EconWPA ewppe/0503006.

[13] Sen A. (1977) "Social Choice Theory : a Re-Examination" *Econometrica* 45(1) : 53-89.

[14] Sen A. (1993) "Internal Consistency of Choice" *Econometrica* 61(3) : 495-521.

[15] Tadenuma K. (2002) "Efficiency First or Equity First ? Two Principles and Rationality of Social Choice" *Journal of Economic Theory* 104(2) : 462-472.

[16] Tideman T.N. (1987) "Independent of Clones as a Criterion for Voting Rules" *Social Choice and Welfare* 4(3) : 185-206.

[17] Zavist T.M. et T.N. Tideman (1989) "Complete Independence of Clones in the Ranked Pairs Rule" *Social Choice and Welfare* 6(2) : 167-173.