Raisonnements sur la permission de dire

P. Balbiani* H. van Ditmarsch† P. Seban*
balbiani@irit.fr hans@cs.otago.ac.nz seban@irit.fr

* Université de Toulouse - CNRS et UPS
Institut de recherche en informatique de Toulouse

† Computing Science, University of Aberdeen, UK
& Computer Science, University of Otago, New Zealand

Abstract:
Our goal is to formalize what "having the permission to say" means. We adapt the dynamic logic of permission considered by van der Meyden in the particular case where atomic actions are public and truthful announcements. Hence, we extend the logic of public announcements introduced by Plaza, that enables us to express the ways agents update their knowledge after public and truthful announcements, by introducing an operator of permission. We present the syntax and the semantics of our logic and we address the issues of axiomatizing and deciding the set of its valid formulas.

Keywords: Epistemic reasoning, deontic reasoning, public announcements, modal logic, axiomatisation and decidability

Résumé :
Notre objectif est de formaliser ce que signifie "avoir le droit de dire". Nous adaptons la logique dynamique de la permission considérée par van der Meyden dans le cas particulier où les actions atomiques sont des annonces publiques vraies. Nous étendons ainsi la logique des annonces publiques introduite par Plaza, qui nous permet d'exprimer comment les agents mettent à jour leurs connaissances après une annonce publique vraie, en introduisant un opérateur de permission. Nous présentons la syntaxe et la sémantique de notre logique et nous répondons aux problèmes de l'axiomatisation et de la décidabilité de l'ensemble de ses formules valides.

Mots-clés : Raisonnement épistémique, raisonnement déontique, annonces publiques, logique modale, axiomatisation et décidabilité

1 Introduction

Quatre joueurs jouent à la belote. Les trente-deux cartes du paquet sont distribuées, chaque joueur commence donc avec huit cartes qu'il connaît, et tout ceci fait partie de la connaissance commune des quatre joueurs. Nous pouvons représenter cette situation en utilisant la logique épistémique (voir [8] pour plus de détails) : l'ensemble des atomes propositionnels de notre langage est $\{(VC)_i | V \in \{7, 8, 9, 10, V, D, R, A\}, C \in \{\clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}, i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$. Un modèle du jeu de belote a quatre relations (d'équivalence) épistémiques, un monde correspond à une distribution, et on dira que $\mathcal{M}, s \models (10\spadesuit)_3$ si le joueur 3 a le dix de pique dans la distribution s. Nous pouvons alors exprimer des phrases telles que "le joueur 2 sait que le joueur 3 a la dame de coeur" ($K_2(D\heartsuit)_3$). Que se passe-t-il lorsque le jeu commence ? Le fait que le joueur 1 joue le 7 de carreau peut être vu comme l'annonce publique que le joueur 1 a le 7 de carreau. Mais il peut arriver qu'il lui soit impossible de jouer cette carte bien qu'il l'ait dans son jeu, car la règle du jeu ne le lui autorise pas. Quels sont alors les annonces qui sont permises dans ce jeu, en fonction de la situation donnée ?

Pour formaliser la permission d'agir, van der Meyden propose la logique dynamique de la permission [16]. Il s'agit essentiellement d'une adaptation de la logique propositionnelle dynamique (PDL) [9] pour laquelle les modèles contiennent un ensemble $\mathcal{P} \subseteq S \times \textbf{Act} \times S$ qui relie chaque action de **Act** à l'ensemble des transitions entre états de S qui lui sont permises. Autrement dit, $\mathcal{P}$ est un ensemble de transitions permises. La syntaxe de ce langage contient les constructions suivantes :

$$\varphi ::= \bot | p | \neg\varphi | \varphi \vee \varphi | [\alpha]\varphi | \Diamond(\alpha, \varphi)$$

où $[\alpha]\varphi$ signifie "*après chaque exécution de l'action α, φ est vrai*", et $\Diamond(\alpha, \varphi)$ signifie "*il existe une exécution de l'action α qui est permise et après laquelle φ devient vraie*".

Notre objectif est de formaliser le concept de "permission de dire". Pour cela, nous choisissons d'adapter la sémantique considérée par [16] dans le cas particulier où les actions sont remplacées par des annonces publiques. L'équivalent de α dans la formule $\Diamond(\alpha, \varphi)$ de van der Meyden devient pour nous l'annonce $\psi!$ de telle sorte que $\Diamond(\psi!, \varphi)$ signifie maintenant 'il est permis d'annoncer ψ, et ensuite φ devient vraie'. La primitive de notre langage est en fait un peu différente car il nous faut prendre en compte la possibilité qu'une séquence d'annonces soit faite, mais nous serons en mesure de définir un tel $\Diamond(\psi!, \varphi)$ comme un cas particulier.

La logique des annonces publiques (PAL), qui est une extension, proposée par Plaza dans [13], de la logique épistémique, pemet d'exprimer la façon dont des agents mettent à jour leurs connaissances après l'annonce publique d'une proposition vraie. Nous pouvons par exemple écrire dans ce langage $\langle\psi\rangle\varphi$, ce qui signifie qu'après l'annonce publique de la proposition vraie ψ, φ devient vraie. Cette logique a été largement étudiée (voir [7]) et étendue (voir par exemple [2] et [3]).

Pour parler de "la permission de dire", nous allons étendre PAL en introduisant un opérateur P de permission, $P\varphi$ exprimant le fait qu'il est permis de dire φ. En fait, pour pouvoir définir la mise à jour de la permission après une annonce publique et obtenir la complétude de notre logique, nous définirons un opérateur binaire plus général $P(\psi, \varphi)$ exprimant le fait que "après l'annonce de ψ il est permis d'annoncer φ". Nous présenterons d'abord la syntaxe et la sémantique de notre logique, puis nous prouverons quelques résultats techinques, en particulier la conmplétude de l'axiomatique que nous définissons et la décidabilité du problème de satisfiabilité.

2 Logique des annonces pulbiques et de la permission

2.1 Syntaxe de $\mathcal{L}_{ppal}$

Le langage $\mathcal{L}_{ppal}$, sur un ensemble dénombrable N d'agents et un ensemble dénombrable Θ d'atomes propositionnels, est défini de la façon suivante :

$$\varphi ::= \bot | p | \neg\varphi | \psi \vee \varphi | K_i\varphi | [\psi]\varphi | P(\psi, \varphi)$$

où $i \in N$ et $p \in \Theta$.

Notre lecture de $K_i\varphi$ est "*l'agent i sait que φ est vraie*" alors que nous interprétons $[\psi]\varphi$ par "*après toute annonce publique possible de ψ, il est vrai que φ*". $P(\psi, \varphi)$ se lit "*après que ψ ait été publiquement annoncé, il est permis de dire φ*". Les abréviations classiques pour les autres opérateurs booléens sont utilisées. Par ailleurs, nous définissons un opérateur $\langle\psi\rangle$ par $\langle\psi\rangle\varphi = \neg[\psi]\neg\varphi$.

En outre, appelons $\mathcal{L}_{pel}$ le fragment de notre langage ne contenant pas d'opérateur d'annonces et $\mathcal{L}_{el}$ celui restreint aux opérateurs épistémiques et booléens.

Définissons d'autres notations qui s'avèreront utiles :

- $F(\psi, \varphi) := \neg P(\psi, \varphi)$
- $P\varphi := P(\top, \varphi)$
- $F\varphi := F(\top, \varphi)$

$P\varphi$ signifie "*il est permis de dire φ*", $F(\psi, \varphi)$ signifie "*après que ψ ait été annoncé publiquement, il est interdit de dire φ*" et $F\varphi$ signifie "*il est interdit de dire φ*".

Enfin, définissons le degré deg d'une formule.

Définition 1 (Degré)**.** *Le degré d'une formule $\varphi \in \mathcal{L}_{ppal}$ est défini par récurrence sur la forme de φ de la façon suivante : $deg(p) = 0$; $deg(\bot) = 0$; $deg(\neg\psi) = deg(\psi)$; $deg(\psi_1 \vee \varphi_2) = max(deg(\psi_1), deg(\psi_2))$; $deg(K_i\psi) = deg(\psi)$; $deg([\psi]\varphi) = deg(\psi) + deg(\varphi)$; $deg(P(\psi, \varphi)) = deg(\psi) + deg(\varphi) + 1$.*

Notons que pour toute formule $\varphi \in \mathcal{L}_{ppal}$, $deg(\varphi) = 0$ ssi φ ne contient aucune occurence de P.

2.2 Sémantique

Les modèles de notre logique sont des structures de la forme $\mathcal{M} = (S, \{\sim_i\}_{i \in N}, V, \mathcal{P})$ où S est un ensemble non-vide d'états, $\sim_i$ est une relation d'équivalence sur les états de S, V est une fonction attribuant un sous ensemble de S à chaque atome propositionnel $p \in \Theta$ et $\mathcal{P} \subseteq S \times 2^S \times 2^S$. Le modèle $\mathcal{M}_\psi$ défini ci-dessous est la mise à jour d'un modèle $\mathcal{M}$ après l'annonce publique de ψ :

Définition 2 (Modèle restreint par une annonce)**.** *Pour tout modèle $\mathcal{M}$ et toute formule $\psi \in \mathcal{L}_{ppal}$, on définit la* restriction *$\mathcal{M}_\psi = (S_\psi, \sim_i^\psi, V_\psi, \mathcal{P}_\psi)$ où :*

- *$S_\psi = [\![\psi]\!]_{\mathcal{M}} = \{s \in S | \mathcal{M}, s \models \psi\}$*
- *pour tout $p \in \Theta$, $V_\psi(p) = V(p) \cap S_\psi$*
- *pour tout i, $\sim_i^\psi = \sim_i \cap (S_\psi \times S_\psi)$*
- *$\mathcal{P}_\psi = \{(s, S', S'') \in \mathcal{P} \mid s \in S_\psi, S' \subseteq S_\psi, S'' \subseteq S_\psi\}$*

Il est maintenant possible de définir la relation de satisfaisabilité $\models$.

Définition 3 (Relation de satisfaisabilité)**.** *Soit $\mathcal{M}$ un modèle et s un état S. La relation de satisfaisabilité $\mathcal{M}, s \models \varphi$ est définie par récurrence sur la structure de φ de la façon suivante :*

$\mathcal{M}, s \models p$ *ssi* $s \in V(p)$

$\mathcal{M}, s \not\models \bot$

$\mathcal{M}, s \models \neg\psi$ *ssi* $\mathcal{M}, s \not\models \psi$

$\mathcal{M}, s \models \psi_1 \vee \psi_2$ ssi ($\mathcal{M}, s \models \psi_1$ ou $\mathcal{M}, s \models \psi_2$)

$\mathcal{M}, s \models K_i\psi$ ssi pour tout $t \sim_i s$, $\mathcal{M}, t \models \psi$

$\mathcal{M}, s \models [\psi]\chi$ ssi ($\mathcal{M}, s \models \psi \Rightarrow \mathcal{M}_\psi, s \models \chi$)

$\mathcal{M}, s \models P(\psi, \chi)$ ssi $(s, [\![\psi]\!]_\mathcal{M}, [\![\langle\psi\rangle\chi]\!]_\mathcal{M}) \in \mathcal{P}$

Si deux états $s, t \in S$, sont liés par la relation d'équivalence $\sim_i$, cela signifie que pour l'agent i, s et t sont indistingables.

L'appartenance de (s, S', S'') à $\mathcal{P}$ peut être interprétée de la façon suivante : dans l'état s, toute annonce qui restreint l'ensemble de tous les mondes possibles à S' le fera de telle sorte que toute annonce ultérieure qui restreindrait l'ensemble de tous les mondes possibles à S'' sera permise.

Pour tout $\varphi \in \mathcal{L}_{ppal}$, l'on note $\mathcal{M} \models \varphi$ ssi pour tout $s \in S$, $\mathcal{M}, s \models \varphi$ et $\models \varphi$ ssi pour tout modèle $\mathcal{M}$ l'on a $\mathcal{M} \models \varphi$.

Il faut noter que nous n'imposons pas que S' et S'' correspondent à des formules du langage pour que (s, S', S'') soit dans $\mathcal{P}$. Cette sémantique est donc plus générale que ce que l'on entend intuitivement lorsque l'on dit "avoir le droit de dire". En effet, si S' ou S'' ne correspondent pas à la restriction de S par l'annonce publique d'une formule donnée, alors le fait que (s, S', S'') soit dans $\mathcal{P}$ ne correspond pas au fait qu'une annonce est permise.

Notons que $\models \langle\psi\rangle\varphi \leftrightarrow \psi \wedge [\psi]\varphi$. Voyons quelques autres formules qui sont valides dans notre logique :

Proposition 4.
- $\models [\psi]p \longleftrightarrow (\psi \rightarrow p)$
- $\models [\psi]\bot \longleftrightarrow \neg\psi$
- $\models [\psi]\neg\varphi \longleftrightarrow (\psi \rightarrow \neg[\psi]\varphi)$
- $\models [\psi](\varphi_1 \vee \varphi_2) \longleftrightarrow ([\psi]\varphi_1 \vee [\psi]\varphi_2)$
- $\models [\psi]K_i\varphi \longleftrightarrow (\psi \rightarrow K_i[\psi]\varphi)$
- $\models [\psi_1][\psi_2]\varphi \longleftrightarrow [\langle\psi_1\rangle\psi_2]\varphi$
- $\models [\psi]P(\psi', \varphi) \longleftrightarrow (\psi \rightarrow P(\langle\psi\rangle\psi', \varphi))$

Ces équivalences appellent une explication, regardons en détail la première. Elle dit que p est vraie après toute annonce possible de ψ ssi si ψ est vraie (et donc peut être annoncée) alors p est vraie. En d'autres termes, une annonce ne peut pas changer la valuation.

Démo. La preuve de la validité des six premières formules est facile et laissée au lecteur (voir [13] pour plus de détails). Démontrons la validité de la septième. Pour tout $\mathcal{M}$, tout $x \in S$ et tout $\psi, \psi', \varphi \in \mathcal{L}_{ppal}$ on a :

($\Rightarrow$) $\mathcal{M}, x \models [\psi]P(\psi', \varphi) \wedge \psi$ seulement si ($x \in [\![\psi]\!]_\mathcal{M}$ et $(x, [\![\psi']\!]_{\mathcal{M}_\psi}, [\![\langle\psi'\rangle\varphi]\!]_{\mathcal{M}_\psi}) \in \mathcal{P}_\psi$) seulement si $(x, [\![\langle\psi\rangle\psi']\!]_\mathcal{M}, [\![\langle\psi\rangle\langle\psi'\rangle\varphi]\!]_\mathcal{M}) \in \mathcal{P}$ seulement si $(x, [\![\langle\psi\rangle\psi']\!]_\mathcal{M}, [\![\langle\langle\psi\rangle\psi'\rangle\varphi]\!]_\mathcal{M}) \in \mathcal{P}$ seulement si $\mathcal{M}, x \models P(\langle\psi\rangle\psi', \varphi)$.

($\Leftarrow$) $\mathcal{M}, x \models (\psi \rightarrow P(\langle\psi\rangle\psi', \varphi)$ seulement si ($x \in [\![\psi]\!]_\mathcal{M}$ implique $(x, [\![\langle\psi\rangle\psi']\!]_\mathcal{M}, [\![\langle\langle\psi\rangle\psi'\rangle\varphi]\!]_\mathcal{M}) \in \mathcal{P}$) seulement si ($x \in [\![\psi]\!]_\mathcal{M}$ implique $(x, [\![\psi']\!]_{\mathcal{M}_\psi}, [\![\langle\psi'\rangle\varphi]\!]_{\mathcal{M}_\psi}) \in \mathcal{P}_\psi$) seulement si $\mathcal{M}, x \models [\psi]P(\psi', \varphi)$. □

Regardons de plus près la septième formule de la proposition 4. Elle dit la chose suivante : "*après l'annonce possible de ψ, nous obtenons qu'après l'annonce de ψ' il est permis de dire φ ssi ou bien ψ ne peut pas être annoncé, ou bien après l'annonce de ψ suivie de l'annonce de ψ' il est permis de dire φ*". Ca ressemble à une tautologie, mais cela souligne précisément que la définition de la mise à jour d'un modèle après une annonce vraie correspond à ce que l'on attend.

Une autre propriété intéressante que revêt notre sémantique est que, sans conditions supplémentaires, la proposition suivante est vraie :

Proposition 5. *Pour tout modèle $\mathcal{M}$ et toutes formules $\psi, \psi', \varphi, \varphi' \in \mathcal{L}_{ppal}$ nous avons que si $\mathcal{M} \models (\psi \leftrightarrow \psi') \wedge (\langle\psi\rangle\varphi \leftrightarrow \langle\psi'\rangle\varphi')$ alors $\mathcal{M} \models P(\psi, \varphi) \leftrightarrow P(\psi', \varphi')$*

Cela vient de la définition de la restriction $\mathcal{P}_\psi$ et correspond aux intuitions suivantes :

1. après deux annonces équivalentes les mêmes formules sont permises d'être dites, et
2. si deux propositions sont équivalentes, elles sont permises d'être dites de la même manière.

Plus précisément :

Démo. Pour tous $\psi, \psi', \varphi, \varphi' \in \mathcal{L}_{ppal}$, si $\mathcal{M} \models (\psi \leftrightarrow \psi')$ et $\mathcal{M} \models \langle\psi\rangle\varphi \leftrightarrow \langle\psi'\rangle\varphi'$, alors $[\![\psi]\!]_\mathcal{M} = [\![\psi']\!]_\mathcal{M}$ et $[\![\langle\psi\rangle\varphi]\!]_\mathcal{M} = [\![\langle\psi'\rangle\varphi']\!]_\mathcal{M}$. Cela implique que pour tout $s \in S$, $(s, [\![\psi]\!]_\mathcal{M}, [\![\langle\psi\rangle\varphi]\!]_\mathcal{M}) = (s, [\![\psi']\!]_\mathcal{M}, [\![\langle\psi'\rangle\varphi']\!]_\mathcal{M})$. □

Les propositions 4 et 5 nous permettent de définir la traduction suivante $tr : \mathcal{L}_{ppal} \rightarrow \mathcal{L}_{pel}$:

Définition 6 (la traduction tr). *On définit $tr(\varphi)$ par récurrence sur la complexité de φ de la façon suivante :*
- $tr(p) = p$
- $tr(\bot) = \bot$
- $tr(\neg\varphi) = \neg tr(\varphi)$
- $tr(\psi \vee \varphi) = tr(\psi) \vee tr(\varphi)$
- $tr(K_i\varphi) = K_i tr(\varphi)$
- $tr(P(\psi, \varphi)) = P(tr(\psi), tr(\varphi))$
- $tr([\psi]p) = tr(\psi) \to p$
- $tr([\psi]\bot) = \neg tr(\psi)$
- $tr([\psi]\neg\varphi) = tr(\psi) \to \neg tr([\psi]\varphi)$
- $tr([\psi](\varphi_1 \vee \varphi_2)) = tr([\psi]\varphi_1) \vee tr([\psi]\varphi_2)$
- $tr([\psi]K_i\varphi) = tr(\psi) \to K_i tr([\psi]\varphi)$
- $tr([\psi_1][\psi_2]\varphi) = tr([\langle\psi_1\rangle\psi_2]\varphi)$
- $tr([\psi_1]P(\psi_2, \varphi)) = tr(\psi_1) \to P(tr(\langle\psi_1\rangle\psi_2), tr(\varphi))$

D'après les propositions 4 et 5, on obtient

Proposition 7. *Pour tout $\varphi \in \mathcal{L}_{ppal}$, $\models \varphi \leftrightarrow tr(\varphi)$.*

Finalement, présentons une propriété très utile du degré d'une formule :

Proposition 8. *Pour toute formule $\varphi \in \mathcal{L}_{ppal}$, $deg(tr(\varphi)) = deg(\varphi)$.*

Les preuves des propositions 7 et 8 peuvent être faites aisément par récurrence sur la complexité de φ.

3 Axiomatique

3.1 Correction et complétude

Soit $PPAL$ la plus petite logique normale sur notre langage qui satisfasse les axiomes inclus dans la table 1 et qui soit close pour la règle d'inférence suivante :
- De $(\psi \leftrightarrow \psi') \wedge (\langle\psi\rangle\varphi \leftrightarrow \langle\psi'\rangle\varphi')$ déduire $P(\psi, \varphi) \leftrightarrow P(\psi', \varphi')$

Proposition 9. *$PPAL$ est une aximoatique correcte pour la classe des modèles de Kripke pour lesquels $\sim_i$ est une relation d'équivalence pour tout $i \in N$.*

Démo. Par les propositions 4 et 5. □

On obtient en particulier la proposition suivante :

Proposition 10. *Pour tout $\varphi \in \mathcal{L}_{ppal}, \vdash_{PPAL} \varphi \leftrightarrow tr(\varphi)$.*

Pour démontrer le résultat de complétude, définissons le modèle canonique pour $PPAL$:

Définition 11 (Modèle canonique). *Le modèle canonique $\mathcal{M}^c = (S^c, \sim_i^c, V^c, \mathcal{P}^c)$ est défini de la façon suivante : S^c est l'ensemble de tous les ensembles $\vdash_{PPAL}$-maximaux consistants ; pour tout $p \in \Theta, V^c(p) = \{x \in S^c \mid p \in x\}$; $x \sim_i^c y$ ssi $K_i x = K_i y$, où $K_i x = \{\varphi | K_i\varphi \in x\}$ et $\mathcal{P}^c = \{(x, S', S'') : \exists P(\psi, \varphi) \in x| \ S' = \{y \in S^c : \psi \in y\}, S'' = \{y \in S^c : \langle\psi\rangle\varphi \in y\}\}$.*

Dans le modèle canonique, un état est donc un ensemble de formules. Le lien entre le fait qu'une formule φ soit dans un ensemble x et le fait que $\mathcal{M}^c, x \models \varphi$ est explicité par la proposition suivante :

Proposition 12 (Truth Lemma pour $\mathcal{L}_{pel}$). *Pour tout $\varphi \in \mathcal{L}_{pel}$,*

$\Pi(\varphi)$: *pour tout $x \in S^c, \mathcal{M}^c, x \models \varphi$ ssi $\varphi \in x$*

Démo. Démontrons la proposition par récurrence sur le degré de φ.

cas initial Si $deg(\varphi) = 0$ alors $\varphi \in \mathcal{L}_{el}$ et $\Pi(\varphi)$ est un résultat connu (voir [4] ou [8] pour plus de détails).

pas de récurrence Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $\Pi(\psi)$ est vrai pour toute formule $\psi \in \mathcal{L}_{pel}$ telle que $deg(\psi) \leqslant k$. Soit φ telle que $deg(\varphi) \leq k+1$. Raisonnons maintenant par récurrence sur la structure de φ.

- $\varphi = p; \bot; \neg\psi; \varphi_1 \vee \varphi_2; K_i\psi$ **:** Voir la preuve du truth lemma pour $\mathcal{L}_{el}$ dans [4] ou [8].
- $\varphi = P(\psi, \chi)$ **:**
  ($\Leftarrow$) Si $P(\psi, \chi) \in x$ alors $(x, S', S'') \in \mathcal{P}^c$ où $S' = \{y \in S^c : \psi \in y\}$ et $S'' = \{y \in S^c : \langle\psi\rangle\chi \in y\}$. Notons que $deg(P(\psi, \chi)) \leqslant k + 1$ implique $deg(\psi) + deg(\chi) \leqslant k$, et en particulier $deg(\psi) \leqslant k$ et $deg(\langle\psi\rangle\chi) \leqslant k$. Nous obtenons donc que $S' = \{y \in S^c : \mathcal{M}^c, y \models \psi\}$ (par HR) et $S'' = \{y \in S^c : \mathcal{M}^c, y \models \langle\psi\rangle\chi\}$. En effet, du fait que $\vdash_{PPAL} \langle\psi\rangle\chi \leftrightarrow tr(\langle\psi\rangle\chi)$ et $deg(\langle\psi\rangle\chi) = deg(tr(\langle\psi\rangle\chi))$, pour tout $y \in S^c$, $\langle\psi\rangle\chi \in y$ ssi $tr(\langle\psi\rangle\chi) \in y$ ssi $\mathcal{M}^c, y \models tr(\langle\psi\rangle\chi)$ (par HR) ssi $\mathcal{M}^c, y \models \langle\psi\rangle\chi$. Finalement, on obtient que $(x, [\![\psi]\!]_{\mathcal{M}^c}, [\![\langle\psi\rangle\chi]\!]_{\mathcal{M}^c}) \in \mathcal{P}^c$ et donc $\mathcal{M}^c, x \models P(\psi, \chi)$.
  ($\Rightarrow$) Si $\mathcal{M}^c, x \models P(\psi, \chi)$ alors $(x, [\![\psi]\!]_{\mathcal{M}^c}, [\![\langle\psi\rangle\chi]\!]_{\mathcal{M}^c}) \in \mathcal{P}^c$. Nous sommes toujours dans le cas où $deg(\psi) \leqslant k$ et

TAB. 1 – L'axiomatique $PPAL$

$K_i\varphi \to \varphi$	vérité
$K_i\varphi \to K_iK_i\varphi$	introspection positive
$\neg K_i\varphi \to K_i\neg K_i\varphi$	introspection negative
$[\psi]p \longleftrightarrow (\psi \to p)$	stabilité pour les atomes
$[\psi]\bot \longleftrightarrow \neg\psi$	ann. et faux
$[\psi]\neg\varphi \longleftrightarrow (\psi \to \neg[\psi]\varphi)$	ann. et négation
$[\psi](\varphi_1 \vee \varphi_2) \leftrightarrow ([\psi]\varphi_1 \vee [\psi]\varphi_2)$	ann. et disjonction
$[\psi]K_i\varphi \longleftrightarrow (\psi \to K_i[\psi]\varphi)$	ann. et connaissance
$[\psi_1][\psi_2]\varphi \longleftrightarrow [\langle\psi\rangle_1\psi_2]\varphi$	composition d'annonces
$[\psi]P(\psi', \varphi) \longleftrightarrow (\psi \to P(\langle\psi\rangle\psi', \varphi))$	ann. et permission

$deg(\langle\psi\rangle\chi) \leqslant k$. On obtient donc que $[\![\psi]\!]_{\mathcal{M}^c} = \{y \in S^c : \psi \in y\}$ (par HR) et $[\![\langle\psi\rangle\chi]\!]_{\mathcal{M}^c} = \{y \in S^c : \langle\psi\rangle\chi \in y\}$ (argument identique). Donc, il existe $P(\psi', \chi') \in x$ tel que $\{y \in S^c : \psi \in y\} = \{y \in S^c : \psi' \in y\}$ et $\{y \in S^c : \langle\psi\rangle\chi \in y\} = \{y \in S^c : \langle\psi'\rangle\chi' \in y\}$. Par conséquent, $(\psi \leftrightarrow \psi') \wedge (\langle\psi\rangle\varphi \leftrightarrow \langle\psi'\rangle\varphi') \in PPAL$ et $P(\psi, \chi) \leftrightarrow P(\psi', \chi') \in PPAL$. Comme $P(\psi', \chi') \in x$, alors $P(\psi, \chi) \in x$. $\square$

Proposition 13. *$PPAL$ est correcte et complète pour la classe de modèles pour lesquels $\sim_i$ est une relation d'équivalence pour tout $i \in N$.*

Démo. La correction a été démontrée dans la proposition 9. Nous montrons la complétude pour cette classe de modèles à l'aide de la proposition 12 . En effet, pour toute formule $\varphi \in \mathcal{L}_{ppal}$: $\models \varphi \Rightarrow \models tr(\varphi) \Rightarrow \mathcal{M}^c \models tr(\varphi) \Rightarrow \vdash_{PPAL} tr(\varphi) \Rightarrow \vdash_{PPAL} \varphi$. $\square$

3.2 Axiomes supplémentaires

Il est possible d'exiger que soient vérifiées les propriétés suivantes, pour toutes formules $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{ppal}$:

1. $\vdash P(\psi, \varphi) \to \psi$: S'il est permis de dire quelquechose après l'annonce de ψ, alors ψ est vrai (et peut donc être annoncé).
2. $\vdash P(\psi, \varphi) \to [\psi]\varphi$: si après avoir annoncé ψ il est permis de dire φ, alors φ est vrai après l'annonce de ψ.
3. $\vdash P(\psi, \varphi) \to \langle\psi\rangle\varphi$

Notons que 1 & 2 est équivalent à 3 (car $\vdash \psi \wedge [\psi]\varphi \leftrightarrow \langle\psi\rangle\varphi$). Que se passe-t-il donc si nous ajoutons ces axiomes à $PPAL$? La réponse est que l'axiomatique que nous obtenons est correcte et complète pour la classe de modèles restreinte correspondante.

Proposition 14.

PPAL + (1) *est correcte et complète pour la classe de modèles pour lesquels $(s, S', S'') \in \mathcal{P} \Rightarrow s \in S'$*

PPAL + (2) *est correcte et complète pour la classe de modèles pour lesquels $(s, S', S'') \in \mathcal{P} \Rightarrow (s \in S' \Rightarrow s \in S'')$.*

Démo. A l'aide d'un argument similaire à celui de la preuve de la proposition 13, il suffit de prouver que ces axiomes supplémentaires sont corrects dans la classe de modèles correspondante, et que chaque nouveau modèle canonique appartient à la classe correspondante. Cette preuve est simple est laissée au soin du lecteur. $\square$

4 Decidabilité et complexité

Nous allons démontrer dans cette section (théorème 23) que $PPAL$ est décidable en démontrant une propriété dite *du modèle fini*. Pour cela, nous allons utiliser une filtration.

Définition 15 (Ensemble fermé)**.** *Un ensemble $X \subseteq \mathcal{L}_{pel}$ est dit* fermé *s'il est fermé pour la sous-formule et s'il vérifie $P(\psi, \varphi) \in X \Rightarrow tr(\langle\psi\rangle\varphi) \in X$.*

Définition 16 (Filtration)**.** *Soit $\mathcal{M} = (S, \sim_i, V, \mathcal{P})$ un modèle et Γ un ensemble fermé de formules. Nous définissons la relation $\leftrightsquigarrow_\Gamma$ entre états de S de la façon suivante : pour tous $s, t \in S$,*

$$s \leftrightsquigarrow_\Gamma t \text{ ssi } \forall \varphi \in \Gamma : (\mathcal{M}, s \models \varphi \text{ ssi } \mathcal{M}, t \models \varphi)$$

Notons que $\leftrightsquigarrow_\Gamma$ est une relation d'équivalence. Pour tout $s \in S$, on note $|s|_\Gamma$ (ou simplement $|s|$) la classe d'équivalence de s pour la relation $\leftrightsquigarrow_\Gamma$.

On appelle filtration de $\mathcal{M}$ suivant Γ *(ou simplement* filtration de $\mathcal{M}$*) le modèle $\mathcal{M}^f_\Gamma = (S^f, \sim^f_i, V^f, \mathcal{P}^f)$ où :*
- $S^f = S/_{\leftrightsquigarrow_\Gamma}$
- $|s| \sim^f_i |t|$ *ssi pour tout* $K_i\varphi \in \Gamma$, $(\mathcal{M}, s \models K_i\varphi$ *ssi* $\mathcal{M}, t \models K_i\varphi)$
- $V^f(p) = \begin{cases} \emptyset \text{ si } p \notin \Gamma \\ V(p)/_{\leftrightsquigarrow_\Gamma} \text{ si } p \in \Gamma) \end{cases}$
- $\mathcal{P}^f = \{(|s|, S'/_{\leftrightsquigarrow_\Gamma}, S''/_{\leftrightsquigarrow_\Gamma})\colon (s, S', S'') \in \mathcal{P}, \leftrightsquigarrow_\Gamma(S') = S'$ *et* $\leftrightsquigarrow_\Gamma(S'') = S''\ \}$

Voici maintenant un lemme utile :

Lemma 17. *Soit $\Gamma \subset \mathcal{L}_{pel}$ un ensemble fermé fini . Pour tout modèle $\mathcal{M}$, sa filtration $\mathcal{M}^f_\Gamma$ contient au plus 2^m états, avec $m = Card(\Gamma)$.*

Démo. Soit $\mathcal{M}$ un modèle. Soit une fontion $g : S^f \to \mathcal{P}(\Gamma)$ définie par $g(|s|) = \{\psi \in \Gamma | \mathcal{M}, s \models \psi\}$. Il découle de la définition de $\leftrightsquigarrow_\Gamma$ que g est bien définie et injective. On en conclut que la taille de S^f est au plus 2^m. □

Les relations épistémiques d'un modèle et leur filtration suivant un ensemble Γ sont liées par la propriété suivante :

Proposition 18. *Soit $\mathcal{M}$ un modèle et Γ un ensemble fermé de formules. Alors pour tous $s, t \in S$, pour tout $\varphi \in \Gamma$:*
1. $s \sim_i t \Rightarrow |s| \sim^f_i |t|$.
2. $|s| \sim^f_i |t|$ *et* $K_i\varphi \in \Gamma$ *et* $\mathcal{M}, s \models K_i\varphi \Rightarrow \mathcal{M}, t \models \varphi$.

Démo.

1. Soient $s, t \in S$ tels que $s \sim_i t$, et soit $K_i\varphi \in \Gamma$. On a alors $\mathcal{M}, s \models K_i\varphi$ ssi pour tout $u \sim_i s, \mathcal{M}, u \models \varphi$ ssi pour tout $u \sim_i t$, $\mathcal{M}, u \models \varphi$ ssi $\mathcal{M}, t \models K_i\varphi$. Alors, par définition de $\sim^f_i$, on obtient que $|s| \sim^f_i |t|$.
2. Supposons la première partie de l'implication. Comme $|s| \sim^f_i |t|$, $K_i\varphi \in \Gamma$ et $\mathcal{M}, s \models K_i\varphi$ alors $\mathcal{M}, t \models K_i\varphi$. Comme $\sim_i$ est réflexive $\mathcal{M}, t \models \varphi$. □

Cette proposition est suffisante pour prouver la proposition importante qui suit :

Proposition 19 (Lemme de Filtration)**.** *Soit $\mathcal{M}$ un modèle et Γ un ensemble fermé de formules. Pour tout $\varphi \in \Gamma$ on a :*

$$(F\varphi)\ \ \forall s \in S, (\mathcal{M}, s \models \varphi ssi \mathcal{M}^f_\Gamma, |s| \models \varphi).$$

Démo. Démontrons-le par récurrence sur le degré de φ.

cas initial Si $deg(\varphi) = 0$ alors $\varphi \in \mathcal{L}_{el}$ et la preuve de $(F\varphi)$ s'obtient par récurrence sur la complexité de φ (voir [4] ou [8] pour plus de détails. Il faut noter aue Γ est en particulier fermé pour la sous-formule).

pas de récurrence Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $(F\psi)$ est vraie pour tout $\psi \in \mathcal{L}_{pel}$ tel que $deg(\psi) \leqslant k$. Soit φ tel que $deg(\varphi) \leq k + 1$ et raisonnons par récurrence sur la structure de φ.

- $\varphi = p; \bot; \neg\psi; \varphi_1 \vee \varphi_2, K_i\varphi$ **:** Voir la preuve du lemme de filtration dans [4] ou [8].
- $\varphi = P(\psi, \chi)$ **:** Soit $s \in S$, on a les équivalence suivantes :
  $\mathcal{M}, s \models P(\psi, \chi)$ ssi $(s, [\![\psi]\!]_\mathcal{M}, [\![\langle\psi\rangle\chi]\!]_\mathcal{M}) \in \mathcal{P}$ ssi $(s, [\![\psi]\!]_\mathcal{M}, [\![tr(\langle\psi\rangle\chi]\!]_\mathcal{M}) \in \mathcal{P}$ ssi $(|s|, [\![\psi]\!]_\mathcal{M}/_{\leftrightsquigarrow_\Gamma}, [\![tr(\langle\psi\rangle\chi)]\!]_\mathcal{M}/_{\leftrightsquigarrow_\Gamma}) \in \mathcal{P}^f$.
  Mais, par hypothèse de récurrence, $t \in [\![\psi]\!]_\mathcal{M}$ ssi $|t| \in [\![\psi]\!]_{\mathcal{M}^f_\Gamma}$ (par $(F\psi)$) et $t \in [\![tr(\langle\psi\rangle\chi)]\!]_\mathcal{M}$ ssi $|t| \in [\![tr(\langle\psi\rangle\chi)]\!]_{\mathcal{M}^f_\Gamma}$ (par $(F\ tr(\langle\psi\rangle\chi))$ avec $tr(\langle\psi\rangle\chi) \in \Gamma$). On obtient $(|s|, [\![\psi]\!]_\mathcal{M}/_{\leftrightsquigarrow_\Gamma}, [\![tr(\langle\psi\rangle\chi)]\!]_\mathcal{M}/_{\leftrightsquigarrow_\Gamma}) \in \mathcal{P}^f$ ssi $(|s|, [\![\psi]\!]_{\mathcal{M}^f_\Gamma}, [\![tr(\langle\psi\rangle\chi)]\!]_{\mathcal{M}^f_\Gamma}) \in \mathcal{P}^f$ ce qui est vrai ssi $\mathcal{M}^f_\Gamma, |s| \models P(\psi, \chi)$ (d'après la sémantique).

□

Définition 20 (Fermeture)**.** *Pour tout $\varphi \in \mathcal{L}_{pel}$, on construit la fermeture de φ, notée $Cl(\varphi)$, par récurrence sur la structure de φ :*
- $Cl(p) = \{p\}$
- $Cl(\bot) = \{\bot\}$
- $Cl(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup Cl(\varphi)$
- $Cl(\psi \vee \varphi) = \{\psi \vee \varphi\} \cup Cl(\psi) \cup Cl(\varphi)$
- $Cl(K_i\varphi) = \{K_i\varphi\} \cup Cl(\varphi)$
- $Cl(P(\psi, \varphi)) = \{P(\psi, \varphi)\} \cup Cl(\psi) \cup Cl(\varphi) \cup Cl(tr(\langle\psi\rangle\varphi))$.

Proposition 21. *Pour toute formule $\varphi \in \mathcal{L}_{pel}, Cl(\varphi)$ est bien définie, et est un ensemble fini et fermé.*

Démo. Démontrons-le par récurrence sur le degré de φ.

cas initial Si $deg(\varphi) = 0$ alors $\varphi \in \mathcal{L}_{el}$ et il nous suffit de prouver que $Cl(\varphi)$ est un ensemble bien défini de formules, fini et fermé pour la sous-formule, ce qui est direct et laissé au lecteur.

pas de récurrence Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $Cl(\psi)$ est un ensemble bien défini de formules, fini et fermé, pour toute formule ψ telle que $deg(\psi) \leq k$. Soit φ telle que $deg(\varphi) \leq k+1$, et raisonnons par récurrence sur la structure de φ

- **$\varphi = p; \bot; \neg\psi; \varphi_1 \vee \varphi_2; K_i\psi$:** Trivial.
- **$\varphi = P(\psi, \chi)$:** $Cl(\psi), Cl(\chi)$ et $Cl(tr(\langle\psi\rangle\chi))$ sont bien définis, fermés et finis, alors $Cl(P(\psi, \chi))$ est un ensemble fini bien défini. Il ne reste qu'à démontrer qu'il est fermé, ce qui est direct et laissé aux soins du lecteur.

□

Proposition 22 (Propriété du modèle fini)**.** *Soit $\varphi \in \mathcal{L}_{pel}$, si φ est satisfaisable alors φ est satisfaisable dans un modèle contenant au plus 2^m états, avec $m = Card(Cl(\varphi))$.*

Démo. Supposons que $\mathcal{M}$ et s sont tels que $\mathcal{M}, s \models \varphi$. Soit $\Gamma = Cl(\varphi)$. Alors, par la proposition 19, $\mathcal{M}^f_\Gamma, |s| \models \varphi$. Par le lemme 17, $\mathcal{M}^f_\Gamma$ contient au plus 2^m états. □

Théorème 23. *$PPAL$ is decidable.*

Démo. Soit $\varphi \in \mathcal{L}_{ppal}$ une formule, la procédure suivante décide si oui ou non φ est satisfaisable :

1. Calculer $\Phi = tr(\varphi)$
2. Calculer $\Gamma = Cl(\Phi)$
3. Pour tout modèle $\mathcal{M}$ de taille $\leq 2^{Card(\Gamma)}$ vérifier si $\exists s \in \mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M}, s \models \Phi$

□

5 Etude de cas

Prenons l'exemple du jeu de belote. Après que l'on ait distribué les cartes, et après le choix d'une couleur d'atout, le premier joueur joue n'importe quelle carte de son jeu, puis c'est au tour de chacun des joueurs successivement, dans le sens des aiguilles d'une montre. Le joueur ayant joué la plus forte carte d'atout ou la plus forte carte de la même couleur que celle du premier joueur remporte la main et entame la main suivante avec n'importe quelle carte de son jeu. A l'exception du premier joueur de chaque main, il est obligatoire de suivre la couleur demandée ou, à défaut, de jouer de l'atout. De plus, lorsqu'un atout est joué, il est interdit de jouer un atout plus bas. Pour plus de détails sur les règles de la belote voir [1].

Comme nous l'avons indiqué précédemment, nous pouvons considérer l'action de jouer une carte comme l'annonce publique que la carte en question appartenait au joueur correspondant. Dans le langage que nous construisons, l'ensemble des atomes propositionnels Θ est donc $\{(VC)_i | V \in \{7, 8, 9, 10, V, D, R, A\}, C \in \{\clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}, i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$. Chaque atome $(VC)_i$ a une valeur V, une couleur C et appartient à un joueur i. Rappelons que $\mathcal{M}, s \models (VC)_i$ signifie que pour la distribution de cartes s, le joueur i possède le V de C. La couleur d'atout a été choisie avant que le jeu ne commence, et nous allons supposer ici que l'atout est trêfle. L'ensemble d'atomes est partiellement ordonné de la façon suivante, qui correspond à l'ordre des cartes dans le jeu ("$*$" peut être remplacé par n'importe quel nom de joueur).

Pour les non-atouts (i.e. pour tout $C \neq \clubsuit$) :

$$7C_* < 8C_* < 9C_* < JC_* < QC_* < KC_* < 10C_* < AC_*$$

Pour les atouts :

$$7\clubsuit_* < 8\clubsuit_* < Q\clubsuit_* < K\clubsuit_* < 10\clubsuit_* < A\clubsuit_* < 9\clubsuit_* < J\clubsuit_*$$

La formalisation complète du jeu serait trop longue et inutile pour notre propos, mais formalisons tout de même, à titre d'exemple, quelques unes des règles du jeu qui sont valides au début de chaque main. Cette condition implique que les modèles $\mathcal{M}$ que nous considérons sont des modèles pour lesquels tous les joueurs ont le même nombre de cartes dans leur main.

1-Un joueur à la fois :

Pour tout $\psi \in \mathcal{L}_{ppal}$, tous joueurs $i \neq j$, tous $p_i, q_j \in \Theta$, $\mathcal{M} \models P(\psi, p_i) \to \neg P(\psi, q_j)$.

2-Chaque carte n'est jouée qu'une fois :

Pour tout $p \in \Theta$, et tout $\psi \in \mathcal{L}_{ppal}$, $\mathcal{M} \models \neg P(p \wedge [p]\psi, p)$

3-Obligation de suivre la couleur demandée : Pour tous V_1, V_2, V', tous $C \neq C'$, et tous $i \neq j$,
$\mathcal{M} \models (V_1 C)_j \to \neg P((V_2 C)_i, (V'C')_j)$

4-Sinon obligation de jouer atout : Pour tous V_1, V, V', tous $C \neq C'$ avec $C, C' \neq \clubsuit$, et tous $i \neq j$,
$\mathcal{M} \models (V_1 \clubsuit)_j \to \neg P((VC)_i, (V'C')_j)$

5-Droit de dire"belote et rebelote" : (Seule exception à la règle d'après) Pour tout i,
$\mathcal{M} \models (K\clubsuit)_i \wedge (Q\clubsuit)_i \wedge P(\psi, (Q\clubsuit)_i) \to P(\psi, (Q\clubsuit)_i \wedge (K\clubsuit)_i)$

6-"On joue pas à la parlante" :
Pour tous $\psi, \varphi \in \mathcal{L}_{ppal}$ et tous s, $\mathcal{M}, s \models P(\psi, \varphi)$ implique que $\varphi \in \Theta$.

7-Obligation de monter à l'atout : pour tout $\psi \in \mathcal{L}_{ppal}$, tous i, j, et tous V, V_1, V_2 tels que $(V_1\clubsuit)_j < (V\clubsuit)_j < (V_2\clubsuit)_j$, $\mathcal{M} \models (V_2\clubsuit)_j \to \neg P(\langle\psi\rangle(V\clubsuit)_i, (V_1\clubsuit)_j)$

etc...

Voyons les conséquences de ces règles conditionnelles sur la permission de dire de l'état (i.e. la distribution) suivant(e) s, où chaque joueur possède 2 cartes.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & Bill(B) & & \\
 & & \boxed{C\heartsuit}\boxed{R\spadesuit} & & \\
Anne & \boxed{7\diamondsuit} & & \boxed{D\clubsuit} & Charles \\
(A) & \boxed{8\heartsuit} & & \boxed{R\clubsuit} & (C) \\
 & & \boxed{8\clubsuit}\boxed{A\clubsuit} & & \\
 & & Diane(D) & &
\end{array}
$$

C'est à Anne de jouer. D'après la règle du jeu, notre modèle vérifie les propriétés suvantes :

$\mathcal{M}, s \models P(8\heartsuit)_A \wedge P(7\diamondsuit)_A \wedge \neg P((8\heartsuit)_A \wedge (7\diamondsuit)_A)$: Anne a la permission de jouer n'importe laquelle de ses deux cartes, mais pas les deux (règle (6))

$\mathcal{M}, s \models \neg P((8\heartsuit)_A, (R\spadesuit)_B)$: Si Anne joue le $8\heartsuit$, Bill n'a pas la permission de jouer une carte d'une autre couleur (règle (3))

$\mathcal{M}, s \models P(\langle(8\heartsuit)_A\rangle(D\heartsuit)_B, (D\clubsuit)_C \wedge (R\clubsuit)_C)$: Lorsque c'est à son tour de jouer, Charles a la permission d'annoncer qu'il possède les deux cartes qui constituent la belote. (règle (5))

$\mathcal{M}, s \models \neg P(\langle\langle(8\heartsuit_A)\rangle(D\heartsuit_B)\rangle(D\clubsuit)_C, (8\clubsuit)_D)$: Après que Charles ait joué atout, Diane peut jouer un atout plus grand donc elle n'a pas la permission d'en jouer un plus petit que celui de Charles (rule (7)).

6 Comparaison et recherches ultérieures

6.1 Comparaison avec la littérature

Notre logique permettant de raisonner sur les annonces permises peut être vue comme une continuation des efforts entamés par van der Meyden dans [16] et Pucella et Weismann dans [14]. La notion de permission de van der Meyden est définissable à partir de notre notion. Il considère un ensemble de variables d'actions a dans sa logique. Dans notre cas, ces actions sont toutes les annonces $\varphi!$. En employant cette terminologie, nous obtenons la correspondance suivante :

Proposition 24. *$\Diamond(\varphi!, \theta)$ est équivalent à $P(\varphi) \wedge \langle\varphi\rangle\theta$*

Démo. Nous pouvons voir l'annonce $\varphi!$ comme une action atomique qui relie chaque état $s \in [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$ au même état $s \in \mathcal{M}|\varphi$. Clairement cette action est *verte* dans la sémantique de van der Meyden (i.e. $\varphi!$ est une action permise) si et seulement si $\mathcal{M}, s \models P(\varphi)$. La proposition devient donc simplement une traduction entre deux langages. $\square$

Bien entendu, le $\Diamond(\varphi!, \theta)$ de van der Meyden ayant un correspondant linguistique $Perm(\varphi)\theta$ dans [14], la relation entre $P(\varphi)$ (le nôtre) et $Perm(\varphi)$ (de Pucella est Weismann) est plus proche encore.

Dans 'Merging Frameworks for Interaction', van Benthem et al. [15, 11] proposent une logique des protocoles qui possède comme cas particulier une logique pour laquelle seuls certaines annonce vraies peuvent effectivement être annoncées. Ce qui peut ou non être annoncé est fixé par des traces ou des séquences de formules. Un ensemble de ces séquences est appelé "protocole". Leur logique semble reliée à notre proposition d'annonces permises – notez que dans notre cas les séquences d'annonces sont induites par la sémantique de $\mathcal{P}$ et la restriction $\mathcal{P}_\psi$ de cette fonction de permission dans le modèle restreint après l'annonce de ψ.

6.2 Dynamiques de la permission

La dynamique de la permission a été étudiée par Pucella et Weismann dans [14]. Ils proposent d'ajouter de nouvelles permissions en reliant les états qui satisfont une proposition ρ_1 aux états satisfaisant une proposition ρ_2, en utilisant un opérateur noté $grant(\rho_1, \rho_2)$.

Une adaptation naturelle de leur proposition, dans le contexte où les actions sont des annonces publiques, est obtenu en définissant l'opérateur modal $grant(\rho_1, \rho_2)$ de la façon suivante : pour tout modèle $\mathcal{M}$ et tout $s \in \mathcal{M}$ l'on a : $\mathcal{M}, s \models grant(\rho_1, \rho_2)\theta$ ssi $\mathcal{M}^g, s \models \theta$ où $\mathcal{M}^g$ est identique à $\mathcal{M}$ sauf pour la relation de permission qui est étendue de la façon suivante : $\mathcal{P}^g = \mathcal{P} \cup \{(s', S_1, S_2) | s' \in S_2 \subseteq S_1$, $\mathcal{M}_{|S_1}, s' \models \rho_1$ and $\mathcal{M}_{|S_2}, s' \models \rho_2\}$. L'opérateur $revoke$ correspondant serait alors tel que $\mathcal{P}$ devienne $\mathcal{P} \backslash \{(s', S_1, S_2) | s' \in S_2 \subseteq S_1$, $\mathcal{M}_{|S_1}, s' \models \rho_1$ et $\mathcal{M}_{|S_2}, s' \models \rho_2\}$.

Une telle définition est particulièrement intéressante si l'on pense qu'avoir ou non la permission de dire quelque chose dépend des conséquences d'une telle annonce.

Mais cette variante naturelle n'est pas forcément appropriée à notre étude de cas. En effet, nous aimerions être à même d'ajouter une nouvelle règle du jeu (ou d'en enlever une). Or pour ces règles, la permission de dire quelque chose dépend des caractéristiques de l'annonce elle-même, et non des états qui sont reliés par l'annonce en question.

Pour exprimer ce type de mise à jour des permissions, on peut définir les opérateurs modaux $GRANT$ and $REVOKE$.

Pour tous $\chi, \psi, \varphi \in \mathcal{L}_{ppal}$, $GRANT(\chi, P(\psi, \varphi))$ est tel que que pour tout modèle $\mathcal{M}$ et tout état $s \in \mathcal{M}$ l'on a : $\mathcal{M}, s \models GRANT(\chi, P(\psi, \varphi))\theta$ ssi $\mathcal{M}^G, s \models \theta$ où $\mathcal{M}^G$ est identique à $\mathcal{M}$ sauf pour la relation de permission qui est étendue de la façon suivante : $\mathcal{P}^G = \mathcal{P} \cup \{(s, [\![\psi]\!]_{\mathcal{M}}, [\![\langle\psi\rangle\varphi]\!]_{\mathcal{M}}) \mid s \in [\![\chi]\!]_{\mathcal{M}}\}$. Intuitivement, après application de $GRANT(\chi, P(\psi, \varphi))$ la proposition suivante fait partie de la règle du jeu : "si χ est vrai, alors après l'annone de ψ il est permis de dire φ"

Proposition 25. *Pour tous $\psi, \varphi \in \mathcal{L}_{ppal}$, la formule suivante est valide :*
$\models GRANT(\chi, P(\psi, \varphi))(\chi \rightarrow P(\psi, \varphi))$

Démo. Cette preuve est aisée et laissée aux soins du lecteur. □

L'on peut introduire d'une façon très similaire l'opérateur $REVOKE(\chi, P(\psi, \varphi))$: par son application, $\mathcal{P}$ devient $\mathcal{P}^R = \mathcal{P} \setminus \{(s, [\![\psi]\!]_{\mathcal{M}}, [\![\langle\psi\rangle\varphi]\!]_{\mathcal{M}}) \mid s \in [\![\chi]\!]_{\mathcal{M}}\}$.

Après introduction de l'une ou l'autre des définitions des opérateurs de la forme "grant et revoke", les problèmes de l'axiomatisation et de la décidabilité restent des problèmes ouverts.

En plus des annonces, nous pourrions étendre notre langage pour inclure des affectations, ou d'autres événements informatifs. Un exemple typique apparaît lorsque un Maire (ou l'officiel correspondant, en fonction du pays, de la législation, ...) déclare un couple "mari et femme". En "changeant le monde", pour ainsi dire, le couple est maintenant soumis à toutes les obligations et les permissions dûes au mariage. Cela ne résulte pourtant pas d'un changement de la loi, mais bien de l'application de la même loi à une nouvelle instance, résultat du changement de l'état du monde. Des changements dans le monde peuvent être obtenus par des affectations publiques, et les logiques pour les annonces publiques et les affectations publiques [6] (ou d'autres, comme souligné précédemment) peuvent donc être étendues de façon évidente à l'aide d'opérateurs de permission

6.3 Quantification sur la permission

Supposons que je sois en train de jouer à la belote. Je peux me demander, dans une situation donnée, s'il existe une carte qu'il m'est permis de jouer et telle que, si je la joue, il soit certain que je remporte la main. Une telle quantification sur les annonces permises peut être exprimée en introduisant l'opérateur $\Diamond(\psi, !)\theta$ exprimant le fait que $P(\psi, \varphi) \wedge [\psi]\langle\varphi\rangle\theta$ pour un certain φ. En d'autres termes, après l'annonce de ψ il existe une annonce permise telle qu'après l'avoir annoncée θ devienne vrai. Il est possible d'adapter aisément les travaux de [2] et [3] pour définir des axiomatiques correctes et complètes pour ce nouveau langage, en considérant la même classe de modèles. Pour le problème de décidabilité, notons qu'en restreignant les modèles à la classe de ceux pour lesquels il n'est rien permis d'annoncer nous obtenons une logique équivalente à la logique PAL dont on sait qu'elle est $PSPACE$-complète (voir [12]). Au contraire, si l'on restreint les modèles à la classe de ceux pour lesquels toute annonce est permise l'on obtient une logique équivalente à la logique $APAL$ dont on sait qu'elle est indécidable (voir [10]). Le problème de la décidabilité lorsqu'on n'opère aucune restriction sur les modèles reste un problème ouvert.

Une autre type de quantification intéressante serait celle contenue dans $P(!, \varphi)$, qui exprime que $P(\psi, \varphi)$ est vrai pour tout ψ. En d'autres termes, quelles que soient les annonces ultérieures, il sera *toujours* permis de dire φ. On pourrait faire entrer les droits humains basiques dans cette catégorie, dans la mesure où rien ne pourrait les remettre en cause. Et on trouverait dans la catégorie "interdit quoi qu'il arrive" des choses du type "tu ne diras point ..."

6.4 Obligation

Pour définir l'obligation de dire quelque chose, on pourrait ajouter un nouvel opérateur modal $O(\psi, \varphi)$ exprimant "*après l'annonce de ψ, il est obligatoire de dire φ*" et une sémantique analogue à la précédente , *id est* un ensemble $\mathcal{O}$ tel que $\mathcal{M}, s \models O(\psi, \varphi)$ ssi $(s, [\![\psi]\!]_{\mathcal{M}}, [\![\langle\psi\rangle\varphi]\!]_{\mathcal{M}}) \in \mathcal{O}$. Comme précédemment, $O(\varphi)$ serait une abréviation de $O(\top, \varphi)$.

Supposons que nous avons cette définition, comment exprimer l'obligation, pour un agent i, de jouer le roi ou la dame de trèfle, ce qui correspond à une situation dans laquelle il est obligatoire de jouer atout ? Notons que $O((K\clubsuit)i \vee (Q\clubsuit)_i)$ n'exprime pas cela, ni d'ailleurs $O(K\clubsuit)_i \vee O(Q\clubsuit)_i$. Il serait donc impossible d'exprimer l'obligation de dire φ_1 ou de dire φ_2. Ce n'est pas surprenant : la définition de l'obligation en logique déontique est un problème réputé plus difficile que celui de la définition de la permission (voir [5] pour plus de détails).

Nous tentons une proposition d'approche. Définissons l'annonce $\varphi!$ comme une action épistémique, et considérons alors le choix non-déterministe comme habituellement. L'obligation de dire φ_1 ou de direφ_2 s'exprimerait alors par $O(\top, \varphi_1! \cup \varphi_2!)$. Les modèles de notre logique seraient ainsi des tuples $\mathcal{M} = (S, V, \sim_i, \mathcal{P}, \mathcal{O})$ avec $\mathcal{O} \subseteq S \times 2^S \times 2^{2^S}$. La relation de satisfaisabilité pourrait alors être définie récursivement comme précédemment, avec pour tout $\mathcal{M}$, tout $s \in S$, et tous $\psi, \varphi_1, \dots \varphi_n \in \mathcal{L}_{ppal}$: $\mathcal{M}, s \models O(\psi, \varphi_1! \cup \dots \cup \varphi_n!)$ ssi $(s, [\![\psi]\!]_{\mathcal{M}}, \{[\![\langle\psi\rangle\varphi_1]\!], \dots, [\![\langle\psi\rangle\varphi_n]\!]\}) \in \mathcal{O}$.

Nous n'avons pas considéré une telle sémantique dans la définition de la permission car nous assumions implicitement que le libre choix s'appliquait (id est que la permission de dire φ_1 ou dire φ_2 correspond à la permission de dire φ_1 et la permission de dire φ_2). Mais à vrai dire, la question de l'alternative entre la sémantique du libre choix et la sémantique du choix imposé reste ouverte (pour plus de détails sur ces notions, voir [5]).

Références

[1] *http ://fr.wikipedia.org/wiki/Belote.*

[2] T. Ågotnes, P. Balbiani, H. van Ditmarsch, and P. Seban. Group announcement logic. *Submitted to the Journal of Applied Logic*, 2009.

[3] P. Balbiani, A. Baltag, H.P. van Ditmarsch, A. Herzig, T. Hoshi, and T.de Lima. 'knowable' as 'known after an announcement'. *Review of Symbolic Logic*, 1(03) :305–344, 2008.

[4] P. Blackburn, M. de Rijke, and Y. Venema. *Modal Logic*. Cambridge University Press, 2001.

[5] Jan Broersen. *Modal Action Logics for Reasoning About Reactive Systems*. PhD thesis, Vrije Universiteit Amsterdam, 2003.

[6] H.van Ditmarsch, W. van der Hoek, and B. Kooi. Dynamic epistemic logic with assignment. In *Proceedings of the fourth AAMAS*, pages 141–148. ACM, 2005.

[7] H.van Ditmarsch, W. van der Hoek, and B. Kooi. *Dynamic Epistemic Logic*. Synthese library. 2007.

[8] R. Fagin, J. Halpern, Y. Moses, and M. Vardi. *Reasoning About Knowledge*. MIT Press, 1995.

[9] M. Fischer and R. Ladner. Propositional dynamic logic of regular programs. *Journal of Computer and System Sciences*, 18(2) :194–211, 1979.

[10] T. French and H. van Ditmarsch. Undecidability for arbitrary public announcement logic. Proceedings of the seventh conference "Advances in Modal Logic", 2008.

[11] T. Hoshi. Logics of public announcements with announcement protocols. Manuscript. Philosophy Department, Stanford University, 2008.

[12] C. Lutz. Complexity and succinctness of public announcement logic. In *Proceedings of the Fifth International Joint Conference on Autonomous Agents and Multi-Agent Systems (AAMAS 06)*, pages 137–144. Springer, 2006.

[13] J. Plaza. Logics of public communications. In *Proceedings of the 4th ISMIS : Poster Session Program*, pages 201–216. Oak Ridge National Laboratory, 1989.

[14] R. Pucella and V. Weissman. Reasoning about dynamic policies. *Lecture Notes in Computer Science*, 2987 :453–467, 2004.

[15] J. van Benthem, J. Gerbrandy, T. Hoshi, and E. Pacuit. Merging frameworks for interaction. *Jounal of Philosophical Logic*, forthcoming.

[16] R. van der Meyden. The dynamic logic of permission. *Journal of Logic and Computation*, 6(3) :465–479, 1996.